МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

О.І. Маршак, Н.Р. Книрік, Є.Ю. Беркунський, Н.А. Маршак-Мазикіна

ВИКОРИСТАННЯ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ В ІНЖЕНЕРНИХ РОЗРАХУНКАХ

Частина 1.

РОЗВ′ЯЗАННЯ РІВНЯНЬ ТА СИСТЕМ РІВНЯНЬ ЗАСОБАМИ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ

Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт

Миколаїв 2008

УДК 519.6:004.67(07)

Маршак О.І., Книрік Н.Р., Беркунський Є.Ю., Маршак-Мазикіна Н.А. Використання електронних таблиць в інженерних розрахунках: Методичні вказівки до виконання лабораторних робіт: В 2 ч. – Ч. 1. Розв′язання рівнянь та систем рівнянь засобами електронних таблиць. – Миколаїв: НУК

Кафедра інформаційних управляючих систем и технологій

Методичні вказівки містять лабораторні роботи третього модулю (перший модуль 2-го семестру) з дисципліни ″Інформатика″. Методичні вказівки включають теоретичні основи і методичні приклади виконання завдань для лабораторних робіт і рішення задач з основних розділів дисципліни.

Призначені для студентів першого курсу спеціальності – ″Зварювння″ і можуть бути корисними для студентів інших спеціальностей.

Рецензент: доктор технічних наук, професор К.В. Кошкін

Вступ

Методичні вказівки містять лабораторні роботи, метою проведення яких є ознайомлення студентів з чисельними методами розв′язання задач, що описуються нелінійними рівняннями та системами рівнянь. Лабораторні роботи націлені на вироблення навичок, необхідних при вирішенні проектних і наукових завдань з використанням електронних таблиць Microsoft Excel та OpenOffice.org Calc.

Перша лабораторна робота, знайомить з основними можливостями електронних таблиць, які можуть бути застосовані для дослідження функцій та побудови графіків функцій. Друга лабораторна робота знайомить студентів з ітераційними методами розв'язання нелінійних рівнянь, а саме, методами: дихотомії, хорд, дотичних та простої ітерації. У третій роботі представлені завдання на розв'язання систем лінійних рівнянь за формулами Крамера та матричним способом.

Методичні вказівки містять короткі теоретичні відомості з кожної лабораторної роботи. Теоретичний матеріал викладений стисло і розрахований на студентів, які вперше вивчають даний предмет. Наведені приклади вирішення завдань з використанням електронних таблиць Microsoft Excel та OpenOffice.org Calc.

Лабораторні роботи проводяться кожним студентом індивідуально. Для цього студент отримує одне із завдань відповідно до вказаного викладачем варіанта. Робота виконується згідно до даних методичних вказівок під керівництвом викладача. Перед виконанням роботи на ЕОМ студентові слід отримати до неї допуск. При виконанні лабораторної роботи студент повинен пред′явити робочу версію розрахунку і результати розрахунків на ЕОМ.

Лабораторна робота вважається виконаною після її захисту. Для захисту роботи необхідно представити результати розрахунку на ЕОМ і звіт, оформлений відповідно до вимог.

Побудова графіків функцій

Величини сталі та змінні. Функція. Побудова графіків функцій. Способи задання функції.

Величини сталі та змінні. Функція

Сталі величини. Величина називається ***сталою***, якщо вона завжди або в умовах даної задачі зберігає одно й те саме числове значення.

Сталі величини поділяють на абсолютні сталі величини і параметри. Величина, яка не змінює свого значення за усіх умов, називається ***абсолютною сталою*** (наприклад, всі числа, сума внутрішніх кутів трикутника, число π). ***Параметром*** називається така стала величина, яка тільки в умовах даної задачі (даного дослідження) зберігає стале, певне числове значення, але із зміною умов завдання приймає вже інше, хоча, знову-таки, певне числове значення.

Змінні величини. Величина називається ***змінною***, якщо вона в умовах даної задачі набуває різних числових значень.

Дві змінні величини називаються ***незалежними***, якщо значення, яке приймає одна з них, не залежить від значень, які набуває інша.

Функція. Змінна величина y називається ***функцією***[1] від змінної величини x, якщо кожному значенню x, яке розглядається, за відомим правилом або законом відповідає одне певне значення y. Функціональну залежність між x та y позначають так[2]:

$$y = f(x). \tag{1.1}$$

В запису (1.1) x називається ***аргументом*** або незалежною змінною, а y – ***функцією*** або залежною змінною.

Задання функції. Функція (1.1) вважається заданою, якщо:

1) Вказано сукупність усіх даних значень аргументу x.

---

[1] Термін ***функція*** було введено у 1692 р. Лейбніцом.
[2] Позначення $f(x)$ було введено Ейлером.

2) Вказано закон, який дозволяє по заданому значенню аргументу x знаходити відповідне йому значення функції y.

Частковим значенням функції називається те її значення, яке відповідає частковому значенню аргументу $x = x_0$. Для позначення часткового значення функції при $x = x_0$ вживається символ $f(x_0)$ або $y(x_0)$.

Область існування функції. Якщо функцію задано аналітично, то ***областю існування функції*** (інакше, ***областю визначення функції***) називається сукупність тих дійсних значень аргументу, при яких аналітичний вираз, що визначає функцію, не втрачає числового сенсу і набуває лише дійсних значень.

Область зміни функції. Сукупність усіх значень y, що одержані згідно функціональної залежності, утворюють множину, яка називається ***областю зміни функції***.

Приклад 1. Визначити область існування функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12}$.

Розв'язок. Задана функція $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12}$ визначена при всіх дійсних значеннях x, крім тих, при яких знаменник дробу $x^2 - 7x + 12$ дорівнює нулю, тобто окрім $x = 3$ та $x = 4$ (ці значення знайдені при розв′язанні рівняння $x^2 - 7x + 12 = 0$). Область існування заданої функції складається з трьох інтервалів: $(-\infty, 3)$, $(3, 4)$, $(4, \infty)$.

Побудова графіків функцій

Побудова графіків функцій. ***Графіком функції*** $y = f(x)$ називається сукупність усіх точок площини, абсциси яких є значеннями аргументу, узяті із області існування функції, а ординати – відповідні цим аргументам значення функції. Згідно з цим означенням, для побудови точного графіка функції нам слід було б побудувати всі точки, що належать графіку, а це, як правило, зробити неможливо, оскільки, взагалі кажучи, графік функції містить нескінченну множину точок.

Для побудови графіку функції $y = f(x)$ зазвичай діють таким чином: надають аргументу декілька часткових значень і користуючись аналітичним виразом функції, обчислюють відповідні значення функції.

Якщо, наприклад, взяти значення аргументу $x = x_1$; $x = x_2$; $x = x_3$; ...; $x = x_n$, то відповідними значеннями функції будуть

$$y_1 = f(x_1);\ y_2 = f(x_2);\ y_3 = f(x_3);\ \ldots;\ y_n = f(x_n).$$

Ці значення зводять у таблицю такого вигляду, як наведено на Рис. 1. 1.

x	y
x_1	y_1
x_2	y_2
x_3	y_3
…	…
x_n	y_n

Рис. 1. 1

Після цього беруть прямокутну систему координат, обирають масштабну одиницю та будуть точки

$$M_1(x_1, y_1),\ M_2(x_2, y_2),\ M_3(x_3, y_3),\ \ldots,\ M_n(x_n, y_n).$$

Отримані точки з′єднують плавною кривою. Ця крива дає ескіз графіка функції (наближений графік).

Перед складанням таблиці числових значень функції, дуже корисно з'ясувати питання про симетрію графіка функції. Якщо функцію можна віднести до класу парних або непарних функцій, то побудова її графіку значно полегшується.

Область існування функції називається ***симетричною***, якщо разом з числом x до цієї області належить і число $-x$ (геометрично це означає, що симетрична область існування функції розташована симетрично відносно початку координат).

Функція $y = f(x)$ називається ***парною*** на симетричній відносно початку координат області, якщо для кожного значення аргументу *x* з цієї області має місце рівність

$$f(-x) = f(x)\,. \tag{1.2}$$

Таким чином, якщо функція – парна, то зміна знаку аргументу не впливає на значення функції, тому у випадку парної функції кожній точці її графіку з абсцисою *x* і ординатою *y*, відповідає точка, яка має абсцису -*x* і ту ж саму ординату *y*. Отже, можна зробити висновок, що ***графік парної функції розташований симетрично відносно осі Oy***.

Якщо функція парна, для побудови графіку потрібно:

1) Побудувати тільки частину графіку цієї функції, розташовану праворуч від осі *Oy*, тобто при складанні таблиці числових значень функції надаватимемо аргументу лише додатні значення і значення, рівне нулю, якщо це значення належить області існування функції.
2) Побудувати "дзеркальне відображення" відносно осі *Oy* графіка, отриманого в п. 1).

Функція $y = f(x)$ називається ***непарною*** на симетричній відносно початку координат області, якщо для кожного значення аргументу *x* з цієї області має місце рівність

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{1.3}$$

Таким чином, в непарній функції зміна знаку аргументу на протилежний, змінює на протилежний і знак функції, не змінюючи її абсолютної величини. Тому ***графік непарної функції розташований симетрично відносно початку координат***.

Для побудови графіку непарної функції потрібно:

1) Побудувати тільки частину графіка цієї функції, розташовану праворуч від осі *Oy,* тобто частину, яка відповідає додатним значенням

аргументу (та значенню $x = 0$, якщо нуль належить до області існування функції).

2) Побудувати криву, симетричну відносно початку координат кривій, яка побудована в п.1).

Ці властивості парних та непарних функцій використовують при побудові графіків функцій.

Функція $y = f(x)$ називається ***функцією загального вигляду*** на симетричній відносно початку координат області, якщо для кожного значення аргументу x з цієї області не виконуються рівності $f(-x) = f(x)$ та $f(-x) = -f(x)$. (Функція називається ні парною, а ні непарною).

Приклад 2. З'ясувати парність (непарність) функції $y = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 - 7x + 12}$.

Розв'язок. Визначення парності/непарності функції може спростити побудову графіку, тому обчислимо $f(-x)$:

$$f(-x) = \frac{(-x)^2 - 1}{(-x)^2 - 7(-x) + 12} = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 7x + 12}.$$

З цього робимо висновок, що зміна знаку аргументу змінила абсолютну величину функції. Не виконуються ні рівність $f(-x) = f(x)$, ні рівність $f(-x) = -f(x)$. Тому задана функція не може бути віднесена а ні до парних, а ні до непарних функцій. Це функція загального вигляду.

Приклад 3. На інтервалі, який належить до області існування функції розв'язати задачу табулювання функції $y = 2x^2 - 1$ та побудувати графік. Інтервал та крок табулювання вибрати довільно.

Розв'язок. Розв'язання завдання складається з двох етапів:

1. табулювання функції;
2. побудова графіка функції.

Табулювання функції. Для розв'язання задачі табулювання функції потрібно зазначити інтервал та крок табулювання. Задана функція визначена при всіх дійсних значеннях *x*. Оберемо довільний інтервал, який належить до області існування функції: $(-1,1)$.

Зазвичай, крок вибирають невеликим, щоб таблиця значень функції відображала її поведінку на інтервалі табулювання. Крок, що рекомендується, 0,2 або 0,1. В нашому випадку крок зміни аргументу дорівнюватиме $h = 0{,}1$.

Побудуємо таблиці значень аргументу і функції за допомогою електронних таблиць **MS Excel (Calc).**

По-перше, потрібно ввести шапку таблиці. Для цього вводимо в комірку A1 – *x*, в комірку B1 – *y*, виділяємо комірки A1:B1 та задаємо форматування на панелі інструментів **Форматирование: Полужирный** (для Calc **Жирный**), **По центру** **(Горизонтально по центру**). Далі у діапазон комірок A2:A22 потрібно ввести значення змінної *x*: -1,0; -0,9; ...; 1,0. Ці значення аргументу створюють арифметичну прогресію. Таким чином, заповнити діапазон A2:A22 значеннями аргументу, які змінюються з кроком 0,1, можна будь-яким способом заповнення комірок членами арифметичної прогресії.

Спосіб 1. Для **MS Excel**: Ввести в комірку A2 перший член арифметичної прогресії (-1,0), потім виконати наступну послідовність команд **Правка → Заполнить → Прогрессия** та заповнити діалогове вікно **Прогрессия** як показано на Рис. 1. 2.

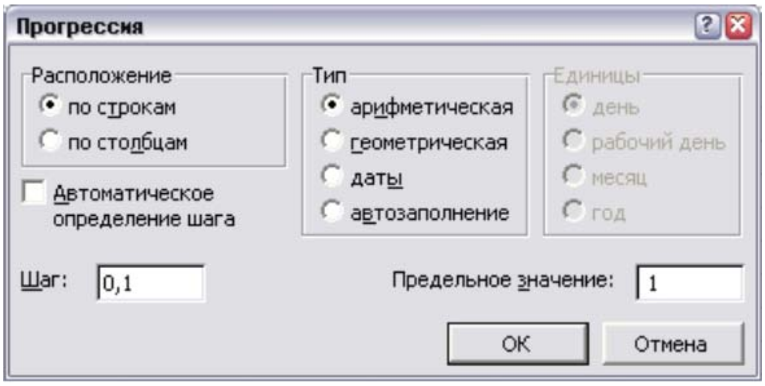


Рис. 1. 2

Для **Calc**: Обрати діапазон комірок, які мають бути заповненні (A2:A22), потім виконати наступну послідовність команд **Правка → Заполнить → Ряды** та заповнити діалогове вікно Заполнить ряды як показано на Рис. 1. 3.)

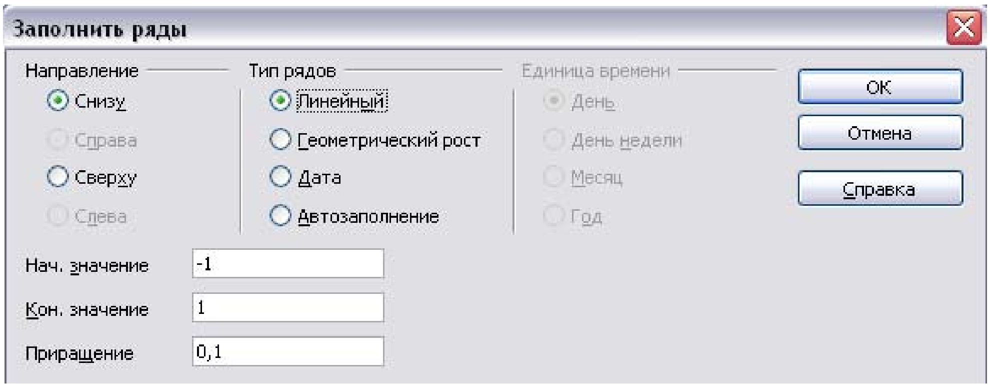


Рис. 1. 3

Спосіб 2. Послідовність операцій однакова для обох табличних процесорів. Ввести в комірку A2 перший член арифметичної прогресії (-1,0), в комірку A3– другий член (-0,9), потім виділити обидві комірки та протягнути за **маркер заполнения** до останнього члену прогресії (1,0).

Спосіб 3. Послідовність операцій однакова для обох табличних процесорів. Для використання цього способу потрібно дещо додати – ввести в комірку D1 значення кроку 0,1. Далі ввести в комірку A2 перший член арифметичної прогресії (-1,0), в комірку A3 – формулу (=A2+$D$1), потім виділити комірку A3 та протягнути за **маркер заполнения** до останньої комірки A22.

Заповнення значень функції для кожного значення аргументу в діапазоні B2:B22 виконується таким чином: в комірку B2 вводиться формула: =2*A2^2-1, потім ця формула копіюється в інші комірки B3:B22 (або з використанням команд **Правка → Копировать**, **Правка → Вставить**; або за допомогою **маркера заполнения**).

Для оформлення таблиці необхідно виділити діапазон комірок A1:B22 та обрати **Формат → Ячейки**. Далі для відображення у значеннях аргументу і функції двох знаків після коми на закладці **Число (**для Calc **Числа)** обирається потрібний формат, на закладці **Выравнивание** вказується вирівнювання тексту по центру, на закладці **Граница (Обрамление)** обирається тип **Все границы**.

Таким чином, таблиці значень функції сформована засобами електронних таблиць MS Excel та OpenOffice.orgCalc та представлена на Рис. 1. 4.

	A	B	C	D
1	*x*	*y*		0,10
2	-1,0	1,00		
3	-0,9	0,62		
4	-0,8	0,28		
5	-0,7	-0,02		
6	-0,6	-0,28		
7	-0,5	-0,50		
8	-0,4	-0,68		
9	-0,3	-0,82		
10	-0,2	-0,92		
11	-0,1	-0,98		
12	0,0	-1,00		
13	0,1	-0,98		
14	0,2	-0,92		
15	0,3	-0,82		
16	0,4	-0,68		
17	0,5	-0,50		
18	0,6	-0,28		
19	0,7	-0,02		
20	0,8	0,28		
21	0,9	0,62		
22	1,0	1,00		

а) MS Excel

	A	B	C	D
1	*x*	*y*		0,10
2	-1,0	1,00		
3	-0,9	0,62		
4	-0,8	0,28		
5	-0,7	-0,02		
6	-0,6	-0,28		
7	-0,5	-0,50		
8	-0,4	-0,68		
9	-0,3	-0,82		
10	-0,2	-0,92		
11	-0,1	-0,98		
12	0,0	-1,00		
13	0,1	-0,98		
14	0,2	-0,92		
15	0,3	-0,82		
16	0,4	-0,68		
17	0,5	-0,50		
18	0,6	-0,28		
19	0,7	-0,02		
20	0,8	0,28		
21	0,9	0,62		
22	1,0	1,00		

б) Calc

Рис. 1. 4

Побудова графіку функції. Засобами електронних таблиць побудова графіків функцій реалізується за допомогою **Мастера диаграмм** (**Вставка → Диаграмма**) таким чином:

Шаг 1. Визначення типу діаграми. Для побудови графіку функції зазвичай обирається **Точечная диаграмма со значениями, соединенными сглаживающими линиями без маркеров** (для Calc **Диаграмма XY, Только линии,** встановити прапорець **Сглаживание линий**). Для продовження слід натиснути кнопку **Далее>**.

Шаг 2. Уточнення діапазону даних.

Для **MS Excel**: на закладці **Диапазоны данных** у текстовому полі **Диапазон** повинно бути =Лист1!$A$1:$B$22, перемикач **Ряды в** встановити у положення **столбцах**; на закладці **Ряды** у поле **Имя** має бути ='Лист1'!$A$1, у полі **Значения X** − ='Лист1'!$A$2:$A$22 (виділити стовпець аргументів таблиці), у полі **Значения Y** − ='Лист1'!$B$2:$B$22 (виділити стовпець значень функції).

Для **Calc**: слід ввести у текстове поле **Диапазоны данных** $Лист1.$A$1:$B$22, встановити перемикач **Ряды данных в столбцах** та прапорець **Первая строка как надпись**.

Шаг 3. Для **MS Excel**: настроювання параметрів діаграми. На закладці **Заголовки** потрібно заповнити текстові поля: **Название диаграммы** – Графік функції, **Ось X (категорий)** – х, **Ось Y (значений)** – у; на закладці **Оси** в групі **по основной оси** слід встановити прапорці **ось X (категорий)** та **Ось Y (значений)**; на закладці **Линии сетки** треба вказати прапорці **основные линии** в групах **Ось X (категорий)** та **Ось Y (значений)**; на закладці **Легенда** потрібно встановити прапорець **Добавить легенду** та в групі **Размещение** обрати перемикач **справа**; на закладці **Подписи данныхи** слід вказати перемикач **нет**.

Для **Calc**: настроювання діапазонів даних для кожного ряду даних. Для ряду даних **у** слід у поля вводу ввести відповідно: **Название** − $Лист1.$B$1, **Значения X** − $Лист1.$A$2:$A$22, **Значения Y** − $Лист1.$B$2:$B$22.

Шаг 4. Для **MS Excel**: розміщення діаграми. Слід обрати один з перемикачів **Поместить диаграмму на листе**. У нашому випадку обирається перемикач **имеющемся.**

Для **Calc**: форматування елементів діаграм. Слід заповнити текстові поля наступним чином: **Заголовок** – Графік функції, **Ось X** – х, **Ось Y** – у; встановити прапорці групи **Отображать сетку Ось X** та **Ось Y**, встановити прапорець **Показать легенду** та перемикач **справа.**

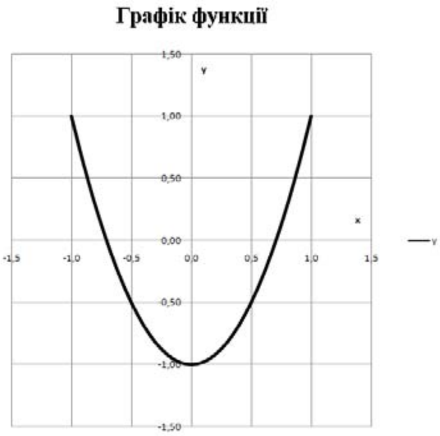
Процес побудови графіка функції завершується після натискання кнопки **Готово**).

Слід зауважити, що побудовані графіки функції мають деякі недоліки, наприклад, не коректно підписані вісі координат.

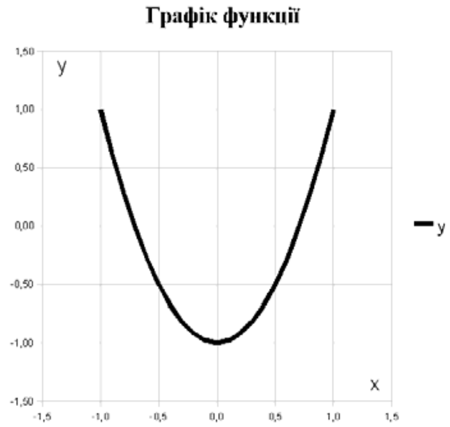
Для корегування діаграм потрібно:

- перемістити підпис назви вісі *Ox* за допомогою миші;
- перемістити підпис назви вісі *Oy* за допомогою миші та змінити кут повороту назви вісі: виділити її та в контекстному меню **MS Excel** обрати **Формат названия оси → Выравнивание → Ориентация –** 0 градусів (для **Calc**: **Свойства объекта → Выравнивание → Направление текста**);
- Для графіку MS Excel можна ще для наочності встановити білий фон області побудови графіку (в контекстному меню обрати **Формат области построения**).

Відкориговані графіки функцій показані на Рис. 1. 5.



а) MS Excel



б) Calc

Рис. 1. 5

Способи задання функції

Як було зазначено вище, задати функцію означає встановити закон залежності між x та y. До основних способів, якими можна виразити цей закон, відносяться: а) табличний; б) графічний; в) аналітичний; г) словесний.

а) *Табличний спосіб* задання функції.

При цьому способі в певному порядку виписуються ряд значень незалежної змінної $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ і відповідні значення функції $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$. (Наприклад, таблиці логарифмів, таблиці значень тригонометричних функцій і т.д.). Табличний спосіб задання функції дуже поширений в техніці, природознавстві і т.п. Цей спосіб дуже зручний, коли область визначення функції складається із скінченого числа точок. Тоді функцію можна задати за допомогою таблиці, в якій в одному рядку (або стовпчику) записані всі значення аргументу, а в другому – відповідні значення функції:

x	x_1	x_2	x_3	…	x_n
y	y_1	y_2	y_3	…	y_n

<u>Переваги</u>: дає можливість визначити ті або інші конкретні значення функції відразу, без додаткових вимірів або обчислень.

Недоліки: визначає функцію не повністю, а лише для деяких значень аргументу, не дає наочного зображення характеру зміни функції із зміною аргументу.

б) *Графічний спосіб* задання функції.

Цей спосіб полягає в тому, що подається графік певної функції. Маючи графік функції, можна знайти її значення в будь-якій точці, яка належить сукупності точок, що утворюються при проектуванні графіка на вісь Ox (це буде область існування функції). Для цього з точки x треба провести перпендикуляр до вісі Ox, продовжити його до перетину з графіком і виміряти довжину цього перпендикуляра (беручи її із знаком мінус коли графік знаходиться під віссю Ox).

Переваги: дає просте і наочне уявлення про якісну поведінку функції.

Недоліки: менш придатний для обчислень ніж таблиця значень функції через те, що точність обчислення значень функції за допомогою графіка досить низька внаслідок похибок при проведенні перпендикулярів і вимірюванні довжин, а також внаслідок того, що крива не є лінією в геометричному розумінні, бо має певну товщину.

в) *Аналітичний спосіб* задання функції.

За цим способом функція задається аналітично, за допомогою формули. Такий спосіб дає можливість для кожного чисельного значення аргументу x знайти відповідне йому чисельне значення функції y точно або з деякою точністю.

При аналітичному способі функція може бути задана і декількома різними формулами. Наприклад, функцію

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, \text{ якщо } -\pi \le x \le 0,\\ 1, \text{ якщо } 0 < x < 1,\\ \dfrac{1}{x}, \text{ якщо } 1 \le x \le 2,\end{cases}$$

задано в області визначення $[-\pi;2]$ за допомогою трьох формул.

Якщо залежність між аргументом x і функцією y задана формулою, розв′язаною відносно функції y, тобто має вигляд $y = f(x)$, то кажуть, що функція від x задана в ***явному вигляді***, наприклад: $y = 6x - 2$, $y = x^{2\ln x}$.

Якщо ж значення x і y зв'язані деяким рівнянням вигляду $F(x, y) = 0$, тобто формула не розв′язана відносно функції y, то кажуть, що функція задана ***неявно***, наприклад, рівняння $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ неявно визначає дві функції $y = \pm\sqrt{r^2 + x^2}$.

Слід зауважити, що не кожну неявно задану функцію можна представити у явному вигляді: $y = f(x)$. Навпаки, будь-яку явну функцію $y = f(x)$ можна завжди представити у вигляді неявної: $y - f(x) = 0$.

Ще одним різновидом аналітичного задання функції може бути випадок, коли і аргумент x, і функція y є функціями третьої величини – параметра t:

$$x = \varphi(t),$$
$$y = \psi(t),$$

де t приймає значення на множині T. Тут кожному чисельному значенню t_0 параметра t з області його зміни T відповідають чисельні значення $x_0 = \varphi(t_0)$ та $y_0 = \psi(t_0)$ величин x і y. Ця відповідність визначає y як функцію від x (або x як функцію від y). Таке задання функціональної залежності називається ***параметричним***.

Розглядаючи значення x і y як координати точки на координатній площині xOy, видно, що кожному значенню t відповідатиме певна точка площини. Якщо t змінюється від t_1 до t_2, то точка на площині описує деяку криву. При виключенні параметру t з рівнянь, отримаємо функцію, яку задано в явному вигляді.

Функцію можна задати також і в полярних координатах.

Полярна система координат визначається заданням деякої точки O, променю Op, направленому з цієї точки та одиниці масштабу l

для виміру довжин (Рис. 1. 6). Точка O називається ***полюсом***, промінь Op – ***полярною віссю***. Крім того, при завданні полярної системи повинно бути сказано, які повороти довкола точки O вважаються додатними (на кресленнях зазвичай додатними вважаються повороти проти годинникової стрілки).

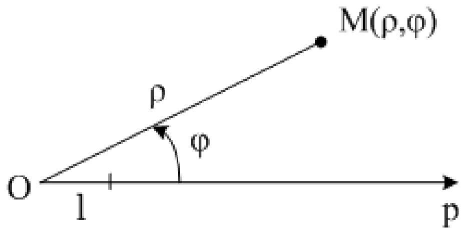


Рис. 1. 6

Нехай M – довільна точка площини. Позначимо через ρ і φ її відстань від полюса і кут, відлічуваний від полярної вісі проти годинникової стрілки до напряму OM. Ці числа називаються *полярними координатами* точки M, причому величина ρ називається полярним радіусом, а φ – полярним кутом точки M. За своїм визначенням величина ρ додатна. Задання пари чисел (ρ,φ) однозначно визначає точку M на площині. Якщо обмежити зміну кута φ межами $0 \le \varphi \le 2\pi$ (або $-\pi \le \varphi \le \pi$), то, і навпаки, кожній точці на площині відповідає пара чисел (ρ,φ).

Виключенням є тільки полюс O, для якого $\rho = 0$, а кут φ невизначений.

Якщо обрати декартову систему координат таким чином, щоб її початок O співпав з полюсом полярної системи, а вісь Ox – з полярною віссю Op, то між полярними координатами (ρ,φ) і декартовими координатами (x,y) кожної точки M існує наступний зв'язок (Рис. 1. 7):

$$x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi \qquad (1.4)$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},\ tg\varphi = \frac{y}{x} \qquad (1.5)$$

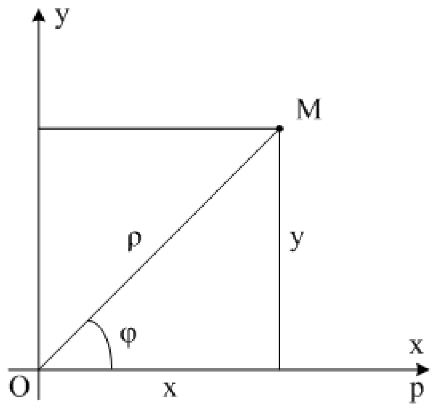


Рис. 1. 7

З цих формул випливає, що:

$$\cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (1.6)$$

Остання з формул (1.5) визначає два кута φ та $\varphi+\pi$ (в межах від 0 до 2π). Формули (1.6) уточнюють який з цих кутів слід вибрати.

<u>*Переваги*</u>: компактність, можливість обчислення значення функції при довільному значенні аргументу з області існування, можливість застосування до даної функції апарату математичного аналізу завдяки тому, що формула містить (хоч і в прихованому вигляді) всі відомості про функцію.

<u>*Недоліки*</u>: недостатня наочність через те, що дані про функцію формула містить у прихованому вигляді і у випадку складних формул досить важко виявити всі її властивості (крім того, необхідно виконувати дуже громіздкі обчислення).

Приклад 4. Протабулювати на інтервалі $0 \le \varphi \le 2\pi$ функцію, що задана в полярних координатах: $\rho = A\varphi$ (**спіраль Архімеда)** для трьох значень коефіцієнту A: A_1=1; A_2=2; A_3=3 та побудувати три графіка цієї функції для різних коефіцієнтів в одній декартовій системі координат.

Розв'язок. Табулювання функцій. Процес табулювання функцій однаковий для обох табличних процесорів.

По-перше, необхідно створити таблицю значень функції в полярних координатах з одним із коефіцієнтів (наприклад, $\rho = A_1\varphi$) на заданому інтервалі $0 \le \varphi \le 2\pi$ з кроком $h = \pi/8$ (крок обирається довільно). Доцільно використовувати *Спосіб 3* заповнення комірок членами арифметичної прогресії, який описано у прикладі 3. Формула обчислення значення функції: =$B$1*A8, де $B$1 – це абсолютне посилання на комірку, яка містить значення коефіцієнту A; A8 – відносне посилання на комірку, яка містить значення φ.

По-друге, дані для побудови графіка мають бути представлені в декартовій системі координат – потрібно сформувати таблиці значень x та y (значення аргументу і функції в декартових координатах для коефіцієнту A_1). Для цього слід використати формули (1.4)

$$x = \rho \cos\varphi, \ y = \rho \sin\varphi .$$

Отже, значення x та y при переведенні з полярної системи координат до декартової обчислюються за такими формулами відповідно:

=C8*COS($A8);

=C8*SIN($A8).

Таким чином, за допомогою формул переведення в декартову систему координат, отримана таблиця значень x та y (Рис. 1. 8).

	A	B	C	D	E	F
1	A1=	1				
2	A2=	2				
3	A3=	3				
4						
5	h=	0,393				
6			**A1=1**			
7	***fi***		***ro***		***x***	***y***
8	0,000		0,000		0,000	0,000
9	0,393		0,393		0,363	0,150
10	0,785		0,785		0,555	0,555
11	1,178		1,178		0,451	1,088
12	1,571		1,571		0,000	1,571
13	1,963		1,963		-0,751	1,814
14	2,356		2,356		-1,666	1,666
15	2,749		2,749		-2,540	1,052
16	3,142		3,142		-3,142	0,000
17	3,534		3,534		-3,265	-1,353
18	3,927		3,927		-2,777	-2,777
19	4,320		4,320		-1,653	-3,991
20	4,712		4,712		0,000	-4,712
21	5,105		5,105		1,954	-4,716
22	5,498		5,498		3,888	-3,888
23	5,890		5,890		5,442	-2,254
24	6,283		6,283		6,283	0,000

Рис. 1. 8

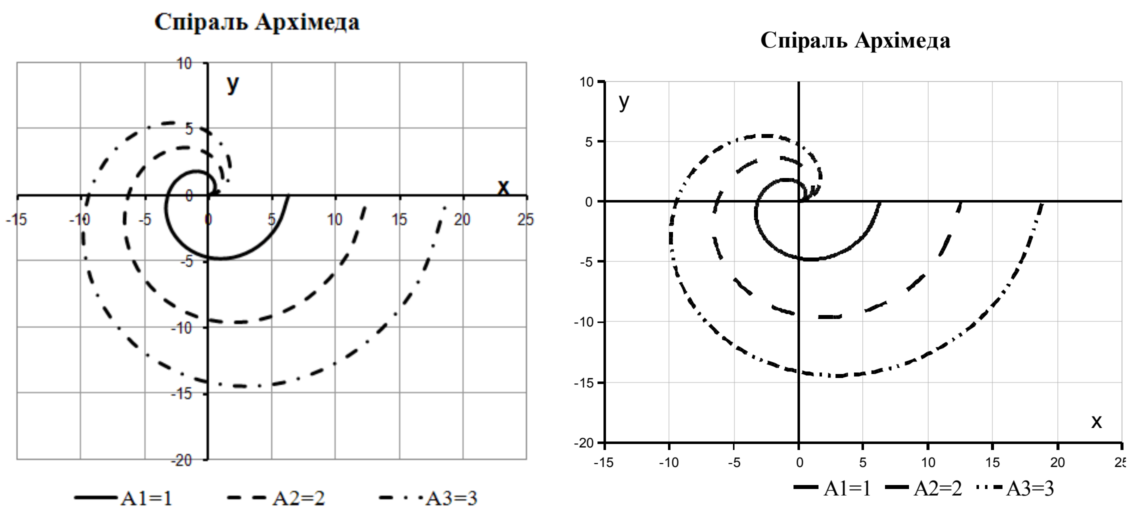
Аналогічно будуються таблиці значень для x та y для коефіцієнтів A_2 та A_3 (Рис. 1. 9)

	A	B	C	E	F	H	J	K	M	O	P
1	A1=	1									
2	A2=	2									
3	A3=	3									
4											
5	h=	0,393									
6			**A1=1**			**A2=2**			**A3=3**		
7	***fi***		***ro***	***x***	***y***	***ro***	***x***	***y***	***ro***	***x***	***y***
8	0,000		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
9	0,393		0,393	0,363	0,150	0,785	0,726	0,301	1,178	1,088	0,451
10	0,785		0,785	0,555	0,555	1,571	1,111	1,111	2,356	1,666	1,666
11	1,178		1,178	0,451	1,088	2,356	0,902	2,177	3,534	1,353	3,265
12	1,571		1,571	0,000	1,571	3,142	0,000	3,142	4,712	0,000	4,712
13	1,963		1,963	-0,751	1,814	3,927	-1,503	3,628	5,890	-2,254	5,442
14	2,356		2,356	-1,666	1,666	4,712	-3,332	3,332	7,069	-4,998	4,998
15	2,749		2,749	-2,540	1,052	5,498	-5,079	2,104	8,247	-7,619	3,156
16	3,142		3,142	-3,142	0,000	6,283	-6,283	0,000	9,425	-9,425	0,000
17	3,534		3,534	-3,265	-1,353	7,069	-6,531	-2,705	10,603	-9,796	-4,058
18	3,927		3,927	-2,777	-2,777	7,854	-5,554	-5,554	11,781	-8,330	-8,330
19	4,320		4,320	-1,653	-3,991	8,639	-3,306	-7,982	12,959	-4,959	-11,973
20	4,712		4,712	0,000	-4,712	9,425	0,000	-9,425	14,137	0,000	-14,137
21	5,105		5,105	1,954	-4,716	10,210	3,907	-9,433	15,315	5,861	-14,149
22	5,498		5,498	3,888	-3,888	10,996	7,775	-7,775	16,493	11,663	-11,663
23	5,890		5,890	5,442	-2,254	11,781	10,884	-4,508	17,671	16,326	-6,763
24	6,283		6,283	6,283	0,000	12,566	12,566	0,000	18,850	18,850	0,000

Рис. 1. 9

Побудова графіків функцій. Слід побудувати графік функції для одного з коефіцієнтів (наприклад, $\rho = A_1\varphi$) так, як описано в попередньому завданні, але на **Шаге 2 Мастера диаграмм MS Excel (Шаге 3 Calc)** додаються ще 2 ряди даних.

Графіки функції, що задана в полярних координатах: $\rho = A\varphi$ (**спіраль Архімеда)** для трьох значень коефіцієнту A: A_1=1; A_2=2; A_3=3 в одній декартовій системі координат представлені на Рис. 1. 10.



а) MS Excel б) Calc

Рис. 1. 10

Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною

Рівняння з одним невідомим, корені рівняння. Алгебраїчні та трансцендентні функції. Лінійні та нелінійні рівняння. Розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною. Розв'язання рівнянь за допомогою графіків. Наближене обчислення дійсних коренів рівняння. Відокремлення коренів. Уточнення коренів.

Рівняння з одним невідомим, корені рівняння

Рівняння з одним невідомим. Співвідношення вигляду

$$f(x) = 0, \tag{2.1}$$

де $f(x)$ – певний аналітичний вираз, який подає аналітично деяку функцію $y = f(x)$ називається ***рівнянням з одним невідомим***.

Корені рівняння. Ті значення змінної x^*, при яких функція $y = f(x)$ дорівнює нулю, тобто такі, що $f(x^*) = 0$, є розв'язками рівняння (2.1) і називаються ***коренями рівняння*** або ***нулями функції*** $f(x)$.

Розв'язати рівняння означає знайти всі його корені, або довести, що їх не існує.

Вважатимемо, що вираз $f(x)$ має смисл, якщо існує щонайменше одне дійсне число α, для якого цей вираз можна обчислити.

Рівняння (2.1) відносяться до того чи іншого класу залежно від того, якою є функція $y = f(x)$.

Алгебраїчні та трансцендентні функції

Функції поділяються на ***алгебраїчні*** і ***трансцендентні***.

Алгебраїчні функції. До ***алгебраїчних функції*** відносяться функції наступного вигляду:

1. *Ціла раціональна функція* або *многочлен* (*поліном*)

$$y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n,$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ – сталі числа, що називаються коефіцієнтами;

n – ціле, невід'ємне число, яке називають степенем многочлену.

Наприклад, функції $y = 5x^2 - 3x + 4$ – квадратична функція, $y = 2x^4 + 3x^3 - 5x^2 + 2x - 3$ – многочлен четвертого ступеня є цілими раціональними функціями.

Якщо $n = 1$, одержуємо функцію $y = a_0 x + a_1$, яку називають ***лінійною функцією***. Зазвичай, лінійну функцію пишуть інакше, а саме, $y = ax + b$.

Функції $y = -3x + 4$, $y = 0.5x + 15.2$ – лінійні.

2. *Дробово-раціональна функція*. Ця функція визначається як відношення двох многочленів:

$$y = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + b_2 x^{m-2} + \ldots + b_m},$$

де $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_0, b_1, b_2, \ldots, b_m$ – коефіцієнти;
n, m – степені многочленів.

Наприклад, функція $y = \dfrac{-3x^4 + 2x^3 + 4}{5x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x + 10}$ є дробово-раціональною функцією.

3. *Ірраціональна функція*. Якщо в формулі $y = f(x)$ в правій частині виконуються операції додавання, віднімання, множення, ділення та зведення до степеня з раціональними нецілими показниками, то функція називається ***ірраціональною***.

Приклади ірраціональних функцій: $y = \dfrac{2x^3 + \sqrt{x}}{\sqrt{1 + 5x^3}}$; $y = \dfrac{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x+1}}{5x^2 + \sqrt{x}}$.

Трансцендентні функції. Функція, яка не являється алгебраїчною, називається ***трансцендентною***.

Такими є показникові, логарифмічні, тригонометричні, обернені тригонометричні функції та функції, до складу яких входять вище перелічені.

Наприклад, функції: $y = \cos 2x$, $y = 3^{x+1}$, $y = \lg x + 2\mathrm{tg}x$, $y = \ln x - x + 3\sin x$ – трансцендентні.

Лінійні та нелінійні рівняння

Лінійні рівняння. Рівняння $f(x) = 0$ називається ***лінійним***, якщо функція $y = f(x)$ – лінійна.

Лінійне рівняння $ax + b = 0$

1. має один розв′язок (корінь) $x^* = -\dfrac{b}{a}$, якщо $a \neq 0$;
2. не має розв′язків, якщо $a = 0$, $b \neq 0$;
3. має безліч розв′язків, якщо $a = 0$, $b = 0$.

Нелінійні рівняння. Рівняння $f(x) = 0$ називається ***нелінійним***, якщо функція $y = f(x)$ – нелінійна.

Нелінійне рівняння називається ***алгебраїчним***, якщо функція $f(x)$ є алгебраїчною (цілою раціональною, дробово-раціональною, ірраціональною).

Якщо функція $f(x)$ не алгебраїчна, то рівняння $f(x) = 0$ називається ***трансцендентним***.

Наведемо приклади рівнянь:

- рівняння $\dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{x^3}{4}$ є цілим раціональним алгебраїчним, тому що функція $f(x) = \dfrac{3x^2}{5} + \dfrac{x-1}{2} - \dfrac{x^3}{4}$ є цілою раціональною;
- рівняння $\dfrac{3x^2+4}{x+1} = 2x + 3$ є дробово-раціональним алгебраїчним, тому що функція $f(x) = \dfrac{3x^2+4}{x+1} - 2x - 3$ – дробово-раціональна;

- рівняння $\sqrt{\frac{1}{3x-1}+\sqrt{3x-1}}=x$ є алгебраїчним ірраціональним, тому що функція $f(x)=\sqrt{\frac{1}{3x-1}+\sqrt{3x-1}}-x$ – ірраціональна;
- рівняння $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5$ є трансцендентним, тому що до складу функції $f(x)=\lg(2^x+x-13)-x+x\lg 5$ входять трансцендентні відносно x функції 2^x, $\lg(2^x+x-13)$.

Розв′язання нелінійних рівнянь з однією змінною

Знайти точні корені нелінійних рівнянь, на жаль, можна лише в часткових випадках, існує не так багато рівнянь, які мають точний розв′язок.

Для алгебраїчних рівнянь було доведено, що ніяке загальне рівняння степеня вище ніж 4 не можна розв′язати алгебраїчно, тобто за допомогою алгебраїчних операцій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добуття кореня)[3].

При розв′язанні більшості трансцендентних рівнянь також не можна знайти точні корені.

В таких випадках шукають наближений розв′язок, тобто число, яке дуже мало відрізняється від істинного, точного розв′язку (кореня).

Розв′язання рівнянь за допомогою графіків

Якщо не потрібна велика точність, то корені різних рівнянь можна знайти за допомогою графіків функцій:

Спосіб 1. Всі члени рівняння переносять в його ліву частину (права частина при цьому дорівнює нулю), позначають ліву частину через $f(x)$, і тоді рівняння приймає вигляд $f(x)=0$. Після цього будують графік функції $y=f(x)$, де $f(x)$ ліва частина рівняння. Абс-

[3] Це довів в 1830 р. французький математик Галуа.

циси точок перетину цього графіка з віссю *Ox* і будуть коренями рівняння, тому що у цих точках $y = 0$.

Спосіб 2. Члени рівняння розбивають на дві групи, одну з них записують в лівій частині рівняння, а іншу – в правій. Рівняння приймає вигляд $f_1(x) = f_2(x)$. Після цього будують графіки двох функцій $y = f_1(x)$ та $y = f_2(x)$. Коренями даного рівняння будуть абсциси точок перетину цих графіків. Так, якщо точка перетину графіків буде мати абсцису x_0, то в цій точці ординати графіків між собою рівні, і тоді $f_1(x_0) = f_2(x_0)$. Ця рівність показує, що x_0 – корінь рівняння.

Наближене обчислення дійсних коренів рівняння

Задача наближеного обчислення дійсних коренів рівняння $f(x) = 0$ с заданою точністю складається з двох етапів:

1. **відокремлення коренів**, тобто визначення інтервалів, в середині яких знаходиться лише один корінь, такий інтервал називається ***інтервалом ізоляції кореня***;
2. **уточнення кожного кореня**, тобто послідовне звуження відповідного інтервалу ізоляції кореня до забезпечення заданої точності.

Відокремлення коренів

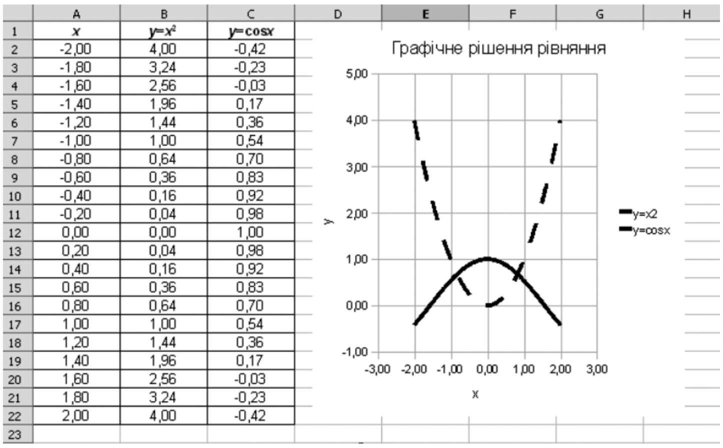
Відокремлення коренів рівняння $f(x) = 0$ базується на відомій теоремі, що стверджує: якщо неперервна функція $f(x)$ на кінцях відрізку $[a,b]$ має значення різних знаків, тобто $f(a) * f(b) < 0$, то в цьому проміжку міститься *хоча б один корінь*. А якщо відомо, що функція монотонна на цьому відрізку, тобто перша похідна функції $f'(x)$ зберігає знак в середині відрізку, то на цьому відрізку знаходиться *тільки один корінь*.

Отже, для знаходження інтервалів ізоляції коренів рівняння (2.1) обирають деякий діапазон, де можуть бути корені, та табулюють функцію на цьому діапазоні з обраним кроком h для знаходження інтервалу, на якому здійснюється зміна знаків функції $f(x)$, тобто виконується нерівність $f(x) * f(x+h) < 0$.

Приклад 5. Визначити інтервали ізоляції коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$.

Розв'язок. Задана функція визначена при всіх дійсних значеннях *x*.

Для визначення інтервалів ізоляції коренів рівняння потрібно обрати деякий діапазон, де можуть бути корені. Для цього може бути використаний *Спосіб 2 Графічного розв'язання рівнянь*. Перетворюємо рівняння до вигляду: $x^2 = \cos x$ та побудуємо графіки функцій $y = x^2$ та $y = \cos x$ (Рис. 2. 1).



	A	B	C
1	x	y=x²	y=cosx
2	-2,00	4,00	-0,42
3	-1,80	3,24	-0,23
4	-1,60	2,56	-0,03
5	-1,40	1,96	0,17
6	-1,20	1,44	0,36
7	-1,00	1,00	0,54
8	-0,80	0,64	0,70
9	-0,60	0,36	0,83
10	-0,40	0,16	0,92
11	-0,20	0,04	0,98
12	0,00	0,00	1,00
13	0,20	0,04	0,98
14	0,40	0,16	0,92
15	0,60	0,36	0,83
16	0,80	0,64	0,70
17	1,00	1,00	0,54
18	1,20	1,44	0,36
19	1,40	1,96	0,17
20	1,60	2,56	-0,03
21	1,80	3,24	-0,23
22	2,00	4,00	-0,42
23			

Рис. 2. 1

З Рис. 2. 1 видно, що графіки функцій $y = x^2$ та $y = \cos x$ перетинаються в двох точках, абсциси цих точок є коренями рівняння $x^2 - \cos x = 0$ и належать проміжкам $[-1,0]$ та $[0,1]$.

Обчислимо $f(-x)$: $f(-x) = (-x)^2 - \cos(-x) = x^2 - \cos x = f(x)$. Отже, функція парна, тоді корені розташовані на вісі абсцис симетрично відносно початку координат. Тому будемо шукати тільки додатний корінь.

Однак, для чисельного розв′язання нелінійного рівняння засобами електронних таблиць слід звузити інтервали ізоляції коренів. Це допоможе зменшити кількість обчислень. Візьмемо інтервал $[0,1]$ та відокремимо на ньому корінь. Для цього протабулюємо функцію $f(x) = x^2 - \cos x$ на інтервалі $[0,1]$ з кроком $h = 0{,}1$ *Способом 3 Табулювання функції*.

Для перевірки нерівності $f(x)*f(x+h)<0$ в комірку С3 введемо формулу для **MS Excel** =ЕСЛИ (B10*B11<0;"!!!";""), для **OO Calc** =IF(B10*B11<0;"!!!";"") та протягнемо за **маркер заполнения** до комірки С12 (Рис. 2. 2).

	A	B	C	D
1	*x*	*y*	*h*=	0,1
2	0,00	-1,00		
3	0,10	-0,99		
4	0,20	-0,94		
5	0,30	-0,87		
6	0,40	-0,76		
7	0,50	-0,63		
8	0,60	-0,47		
9	0,70	-0,27		
10	0,80	-0,06		
11	0,90	0,19	!!!	
12	1,00	0,46		
13				
14				

Рис. 2. 2

Бачимо, що функція змінила знак на інтервалі $[0{,}8;0{,}9]$, отже, додатний корінь належить цьому інтервалу.

Уточнення коренів

При уточненні кореня на знайденому інтервалі не сподівайтеся ніколи знайти точне значення і досягти перетворення функції на нуль при використанні калькулятора або комп'ютера, де самі числа представлені обмеженою кількістю знаків.

Для уточнення коренів розроблено багато чисельних методів. Вони розподіляються на **прямі** та **ітераційні**[4].

В прямих методах знайти шуканий розв′язок можна за певну кількість кроків за заданими формулами.

В **ітераційних методах** кожне наступне повторення операції обчислення за ітераційною формулою дає можливість отримати більш близьке до шуканого кореня його наближене значення. Досить часто ці методи називають **методами послідовних наближень**.

Обчислення наближених значень кореня рівняння слід робити до тих пір, поки не перестануть змінюватися ті десяткові знаки, які ми хочемо зберегти у відповіді (тобто поки не буде досягнута задана точ-

[4] Від латинського ″iteracio″ – повторення

ність). Тоді кажуть, що знайшли розв′язок з певною точністю. Точність задають в умові задачі, або вона відома із будь-яких міркувань, або її теж шукають.

Метод ділення відрізку навпіл (*дихотомії*). Найпростішим з методів уточнення коренів є **метод ділення відрізку навпіл**, або **метод дихотомії**, який призначений для знаходження коренів рівнянь, які представлені у вигляді $f(x) = 0$.

Нехай неперервна і монотонна функція $f(x)$ на кінцях відрізку $[a,b]$ має значення різних знаків, тобто $f(a) * f(b) < 0$ (Рис. 2. 3), тоді на відрізку існує тільки один корінь. Візьмемо середину відрізку $c = (a+b)/2$. Якщо $f(a) * f(c) < 0$, то корінь знаходиться на відрізку $[a,c]$, та у іншому випадку на $[c,b]$.

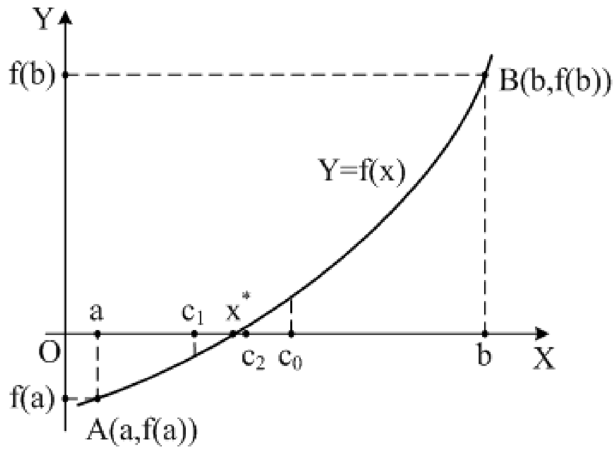


Рис. 2. 3

Тому беремо той відрізок, на якому є корінь, обчислюємо значення функції в його середині, з двох відрізків знов обираємо відрізок, на якому є корінь і т.д. до тих пір, поки довжина чергового відрізка не стане меншою за попередньо вказану точність $(b-a) < \varepsilon$.

Оскільки кожне ділення відрізку навпіл та вибір для подальших обчислень однієї з його двох частин, звужує інтервал пошуку вдвічі, то при початковому відрізку $[a,b]$ і точності ε кількість обчислень n визначається умовою $(b-a)/2^n < \varepsilon$, або $n \approx \log_2((b-a)/\varepsilon)$. Наприклад, при початковому одиничному інтервалі та точністю порядку 6 знаків ($\varepsilon \approx 10^{-6}$) після десяткової точки достатньо провести 20 обчислень (ітерацій) значень функції.

З точки зору машинної реалізації цей метод найбільш простий та використовується у багатьох стандартних програмних засобах, хоча існують і більш ефективні по затратах часу методи.

Приклад 6. Уточнити один з коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$ методом ділення відрізка навпіл (дихотомії) з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. У ***Прикладі 5*** були знайдені інтервали ізоляції кореня. Для уточнення додатного кореня рівняння $x^2 - \cos x = 0$ на інтервалі ізоляції кореня $[0{,}8;0{,}9]$ методом ділення відрізка навпіл з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою електронних таблиць необхідно заповнити комірки табличного процесора наступним чином (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**):

В комірку B20 ввести точність знаходження кореня 0,0001.

Заповнити шапку таблиці як показано на Рис. 2. 4.

	A	B	C	D	E	F
17						
18	***Метод ділення відрізку навпіл***					
19						
20	Точність ε=	0,0001				
21						
22	***a***	***b***	***c***	***f(c)***	***f(a)*f(c)***	

Рис. 2. 4

В комірку A23 – первісне значення *a*=0,8.

В комірку B23 – первісне значення *b*=0,9.

В комірку C23 – первісне значення *c*, яке обчислено за формулою =(A23+B23)/2.

В комірку D23 – формулу обчислення значення функції в середній точці $f(c)$ =C23^2-COS(C23).

В комірку E23 – формулу для перевірки виконання нерівності $f(a) * f(c) < 0$ =(A23^2-COS(A23))*D23.

В комірку F23 – формулу для виведення значення кореня – для **MS Excel**: =ЕСЛИ((B23-A23)<$B$20;"Корінь x="&ОКРУГЛ(C23;4);"")
для **OO Calc**: =IF((B23-A23)<$B$20;"Корінь x="&ROUND(C23;4);"").

Слід зауважити, що у формулу виведення значення кореня рівняння внесено функцію **ОКРУГЛ** (**ROUND**) тому, що корінь обчислюється із заданою точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

В комірку A24 слід ввести формулу обчислення значення *a* для **MS Excel**: =ЕСЛИ(E23<=0;A23;C23)
для **OO Calc**: =IF(E23<=0;A23;C23).

В комірку B24 – формулу обчислення значення *b* для **MS Excel**: =ЕСЛИ(E23<=0;C23;B23)
для **OO Calc**: =IF(E23<=0;C23;B23).

Потім необхідно скопіювати формули діапазону комірок C23:F23 в діапазон C24:F24.

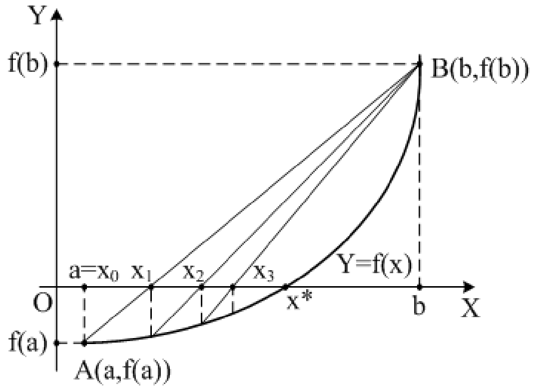
Далі потрібно виділити діапазон A24:F24 та протягнути за **маркер заповнення** до тих пір, поки не буде знайдено корінь (Рис. 2. 5).

	A	B	C	D	E	F
17						
18	**Метод ділення відрізку навпіл**					
19						
20	Точність ε=	0,0001				
21						
22	**a**	**b**	**c**	**f(c)**	**f(a)*f(c)**	
23	0,80000	0,90000	0,85000	0,06252	-0,00355	
24	0,80000	0,85000	0,82500	0,00207	-0,00012	
25	0,80000	0,82500	0,81250	-0,02753	0,00156	
26	0,81250	0,82500	0,81875	-0,01278	0,00035	
27	0,81875	0,82500	0,82188	-0,00537	0,00007	
28	0,82188	0,82500	0,82344	-0,00165	0,00001	
29	0,82344	0,82500	0,82422	0,00021	0,00000	
30	0,82344	0,82422	0,82383	-0,00072	0,00000	
31	0,82383	0,82422	0,82402	-0,00026	0,00000	
32	0,82402	0,82422	0,82412	-0,00003	0,00000	
33	0,82412	0,82422	0,82417	0,00009	0,00000	Корінь x=0,8242

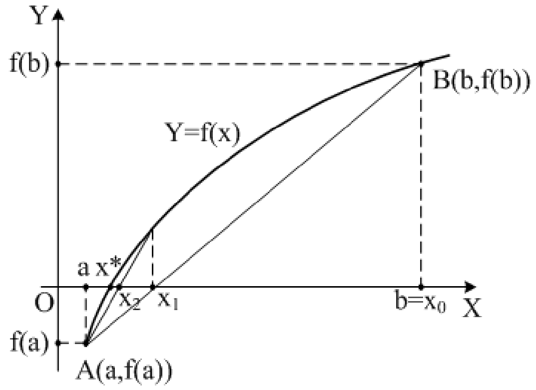
Рис. 2. 5

Отже, наближений додатний корінь рівняння, який знайдено методом дихотомії, $x \approx 0{,}8242$.

Метод хорд. На відміну від методу дихотомії, який звертає увагу лише на знаки значень функції, але не на самі значення, **метод хорд** використовує пропорціональне ділення інтервалу (Рис. 2. 6).



а) $f(a) < 0, f''(a) > 0$



б) $f(a) < 0, f''(a) < 0$

Рис. 2. 6

Тут обчислюються значення функції на кінцях відрізку, після чого будується хорда, яка з′єднує точки $(a, f(a))$ та $(b, f(b))$. Рівняння хорди має вигляд (як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки)

$$\frac{x-a}{b-a} = \frac{y-f(a)}{f(b)-f(a)}.$$

Точка перетину хорди з віссю абсцис вважається за чергове наближення до кореня. Підставляючи координати цієї точки (позначимо абсцису через x, ордината дорівнює нулю) в рівняння хорди маємо

$$x = \frac{a * f(b) - b * f(a)}{f(b) - f(a)}.$$

Аналізуючи знак $f(x)$ у порівнянні зі знаком функції на кінцях відрізку, звужуємо інтервал до $[a,x]$, або $[x,b]$. Якщо значення $f(a)$ та $f(x)$ мають різні знаки, то корінь знаходиться на відрізку $[a,x]$..

Тоді $x_0 = b$, $x_{n+1} = \dfrac{a * f(x_n) - x_n * f(a)}{f(x_n) - f(a)}$, $n = 0,1,2...$

Інакше ($f(a) * f(x) > 0$)корінь належить відрізку $[x,b]$, тоді $x_0 = a$, тоді $x_{n+1} = \dfrac{x_n * f(b) - b * f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}$, $n = 0,1,2...$

Обчислення за наведеними формулами продовжується до тих пір, поки не одержимо наближений корінь з заданою точністю.

Для оцінки похибки методу хорд можна користуватися формулою

$$|\,x^* - x_n\,| \le \frac{|\,f(x_n)\,|}{m} \le \varepsilon\,, \qquad (2.2)$$

де $m \le \min|\,f'(x)\,|$ при $a \le x \le b$,

ε − задана точність.

Для практичних обчислень умову завершення процесу уточнення кореня рівняння зручніше записати у вигляді

$$|\,f(x_n)\,| \le \varepsilon \cdot m\,. \qquad (2.3)$$

В якості m можна взяти найменше значення модуля першої похідної функції $f(x)$ на проміжку $[a,b]$.

Приклад 7. Уточнити один з коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$ методом хорд з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. У ***Прикладі 5*** були знайдені інтервали ізоляції кореня. Для уточнення додатного кореня рівняння $x^2 - \cos x = 0$ на інтервалі ізоляції кореня [0,8;0,9] методом хорд з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою електронних таблиць необхідно заповнити комірки табличного процесора наступним чином (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**):

В комірку B19 ввести точність знаходження кореня 0,0001.

Заповнити шапку таблиці (Рис. 2. 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	***Метод***	***хорд***						
18								
19	Точність ε=	0,0001						
20								
21	***a***	***b***	***f(a)***	***f(b)***	x_n	$f(x_n)$	$f(a)*f(x_n)$	

Рис. 2. 7

В комірку A22 ввести первісне значення *a*=0,8.

В комірку B22 – первісне значення *b*=0,9.

В комірку C22 – формулу, яка обчислює значення функції у точці *a* $f(a)$ =A22^2-COS(A22).

В комірку D22 – формулу, яка обчислює значення функції у точці *b* $f(b)$ =B22^2-COS(B22).

В комірку E22 – формулу обчислення чергового наближення до кореня x =(A22*D22-B22*C22)/(D22-C22).

В комірку F22 – формулу, яка обчислює значення функції у точці x $f(x)$ =E22^2-COS(E22).

Процес уточнення кореня слід завершити тоді, коли умова (2.3) буде виконана. Для цього обчислимо $m = \min|f'(x)|$ при $a \le x \le b$. Функція на проміжку $[a,b]$ монотонна, тому можна обчислити значення модуля першої похідної функція на кінцях інтервалу ізоляції $|f'(a)|$ та $|f'(b)|$, та обрати найменше значення.

Знайдемо першу похідну заданої функції $f'(x) = 2x + \sin x$.

Знайдемо значення першої похідної на кінцях інтервалу ізоляції (Рис. 2. 8).

Введемо у комірку E18 формулу =ABS(2*A22+SIN(A22)), у комірку E19 − =ABS(2*B22+SIN(B22)). Для обчислення $m = \min|f'(x)|$ у комірку G19 введемо

для **MS Excel**: =МИН(E18:E19);

для **OO Calc**: =MIN(E18:E19).

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	***Метод хорд***							
18				|f'(a)|=	2,31736			
19	Точність ε=	0,0001		|f'(b)|=	2,58333	m=	2,31736	

Рис. 2. 8

Далі вводимо в комірку G22 – формулу для перевірки виконання нерівності $f(a) * f(x) < 0$ =C22*F22.

Якщо значення $f(a)$ та $f(x)$ мають різні знаки, то корінь знаходиться на відрізку $[a,x]$, інакше на відрізку $[x,b]$. Таким чином, потрібно ввести в комірку A23 формулу обчислення значення a

для **MS Excel**: =ЕСЛИ(G22<0;A22;E22)

для **OO Calc**: =IF(G22<0;A22;E22).

В комірку B23 – формулу обчислення значення b

для **MS Excel**: =ЕСЛИ(G22<0;E22;B22)

для **OO Calc**: =IF(G22<0;E22;B22).

В комірку H23 ввести формулу для виведення значення кореня – для **MS Excel**: =ЕСЛИ(ABS(F22)<=($B$19*$G$19);"Корінь x="&ОКРУГЛ(E22;4);"")

для **OO Calc**: =IF(ABS(F22)<=($B$19*$G$19);"Корінь x="&ROUND(E22;4);"").

Слід скопіювати вміст комірок C22 H22 до діапазону C23 H23.

Потім потрібно виділити діапазон A23:F23 та протягнути за **маркер заполнения** до тих пір, поки не буде знайдено корінь (Рис. 2. 9).

	A	B	C	D	E	F	G	H
17	***Метод хорд***							
18				|f'(a)|=	2,31736			
19	Точність ε=	0,0001		|f'(b)|=	2,58333	m=	2,31736	
20								
21	**a**	**b**	**f(a)**	**f(b)**	**x_n**	**f(x_n)**	**f(a)*f(x_n)**	
22	0,80000	0,90000	-0,05671	0,18839	0,82314	-0,00237	0,00013	
23	0,82314	0,90000	-0,00237	0,18839	0,82409	-0,00010	0,00000	Корінь x=0,8241

Рис. 2. 9

Наближений додатний корінь рівняння, який знайдено методом хорд, $x \approx 0{,}8241$.

Метод дотичних (*Ньютона*). Найбільш популярним з ітераційних методів є **метод Ньютона** (**метод дотичних**).

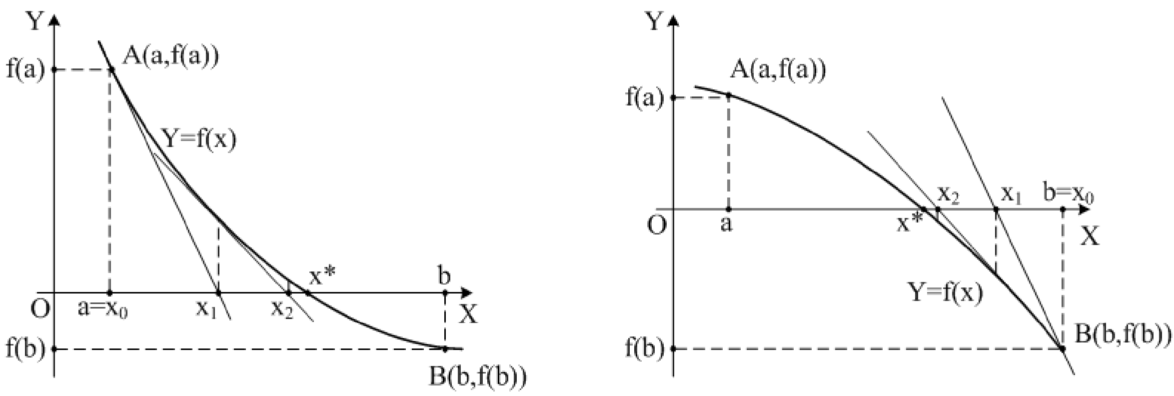
Нехай відомо деяке наближене значення x_n точного кореня x^*. Застосувавши формулу Тейлора та обмежившись у ній двома членами, маємо

$$f(x^*) \approx f(x_n) + (x^* - x_n) f'(x_n) = 0,$$

звідки

$$x^* \approx x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \ n = 0,1,2,...$$

Геометрично цей метод пропонує побудувати дотичну до кривої $y = f(x)$ у обраній точці $x = x_n$, знайти точку перетину її з віссю абсцис та прийняти цю точку за чергове наближення до кореня (Рис. 2. 10).



а) $f(a) > 0, f''(a) > 0$ б) $f(a) > 0, f''(a) < 0$

Рис. 2. 10

Дотична проводиться зі сторони опуклості графіку функції. На практиці за нульове наближення x_0 приймають один із кінців відрізку

($x_0 = a$ або $x_0 = b$), а саме той кінець, в якому функція $f(x)$ та її друга похідна $f''(x)$ мають однакові знаки.

Чотири можливі комбінації знаків функції та її похідних $f'(x)$ і $f''(x)$ визначають чотири типи розташування кривої $y = f(x)$ (Рис. 2. 11).

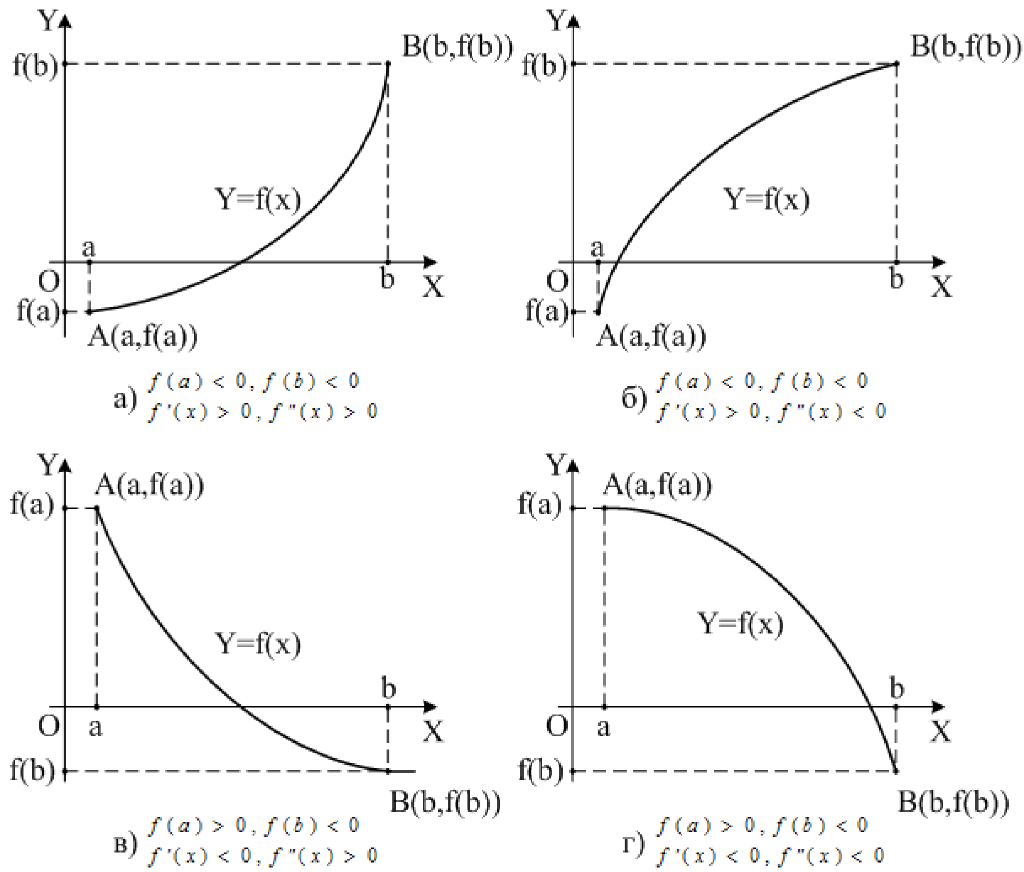


Рис. 2. 11

Очевидно, що метод Ньютона забезпечує процес наближень, що збігається лише при виконанні деяких умов (наприклад, при неперервності та знакопостоянстві першої та другої похідних функції в околі кореня). При їхньому порушенні отримаємо процес, що розбігається (Рис. 2. 12а), або приводить до іншого кореня (Рис. 2. 12б).

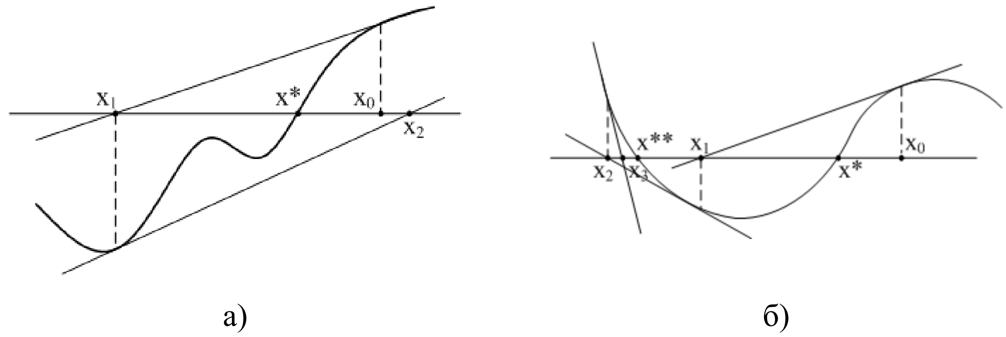


Рис. 2. 12

Очевидно, що для функцій, похідна яких в околі кореня близька до нуля, використовувати метод Ньютона не варто.

Якщо похідна функції мало змінюється в околі кореня, то можна застосовувати спрощену формулу для метода

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)},\ n = 0,1,2,...$$

Існують також інші модифікації метода Ньютона.

Для оцінки похибки метода дотичних також можна застосувати формулу (2.2).

Тоді умова завершення ітераційного процесу уточнення кореня має вигляд

$$\frac{|f(x_n)|}{m} \le \varepsilon \text{, або } |f(x_n)| \le \varepsilon \cdot m,$$

де $m \le \min|f'(x)|$ при $a \le x \le b$,

ε − задана точність.

Приклад 8. Уточнити один з коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$ методом дотичних з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. У ***Прикладі 5*** були знайдені інтервали ізоляції кореня. Для уточнення додатного кореня рівняння $x^2 - \cos x = 0$ на інтервалі ізоляції кореня [0,8;0,9] методом дотичних з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою електронних таблиць необхідно заповнити комірки табличного процесора наступним чином (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**).

В комірку B19 ввести точність знаходження кореня 0,0001.

Для визначення нульового наближення необхідно обчислити $f(x)$ на одному з кінців інтервалу ізоляції кореня, наприклад, $f(a)$, та її другу похідну $f''(a)$. Для цього заповнимо комірки, як показано на Рис. 2. 13:

	A	B	C	D	E	F	G	H
16								
17	***Метод дотичних***							
18								
19	Точність ε=	0,0001						
20								
21	***a*=**	0,8	**f(*a*)=**	-0,05671	**f''(*a*)=**	2,69671	**f(a)*f''(a)=**	-0,15292
22	***b*=**	0,9						

Рис. 2. 13

D21=B21^2-COS(B21);

F21=2+COS(B21);

H21=D21*F21.

Процес уточнення кореня слід завершити тоді, коли умова (2.3) буде виконана. Для цього обчислимо $m = \min|f'(x)|$ при $a \le x \le b$. Функція на проміжку $[a,b]$ монотонна, тому можна обчислити значення модуля першої похідної функція на кінцях інтервалу ізоляції $|f'(a)|$ та $|f'(b)|$, та обрати найменше значення.

Знайдемо першу похідну заданої функції $f'(x) = 2x + \sin x$.

Знайдемо значення першої похідної на кінцях інтервалу ізоляції (Рис. 2. 14).

Введемо у комірку B24 формулу =ABS(2*B21+SIN(B21)), у комірку B25 − =ABS(2*B22+SIN(B22)). Для обчислення $m = \min|f'(x)|$ у комірку G19 введемо

для **MS Excel**: =МИН(B24:B25);

для **OO Calc**: =MIN(B24:B25).

Далі потрібно заповнити шапку таблиці (Рис. 2. 14)

	A	B	C	D	E	F	G	H
16								
17	***Метод дотичних***							
18								
19	Точність ε=	0,0001						
20								
21	***a*=**	0,8	**f(*a*)=**	-0,05671	**f''(*a*)=**	2,69671	**f(a)*f''(a)=**	-0,15292
22	***b*=**	0,9						
23								
24	**|f'(*a*)|=**	2,31736						
25	**|f'(*b*)|=**	2,58333						
26	***m*=**	2,31736						
27								
28								
29	*n*	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}			

Рис. 2. 14

Потім у комірку A30 слід ввести значення 0 – індекс наближення. Обчислення індексів можна виконати *Способом 3 Табулювання функції* (A31=A30+1).

У комірку B30 вводиться формула для визначення чергового наближення для **MS Excel:** =ЕСЛИ(H21<0;B22;B21)
для **OO Calc**: =IF(H21<0;B22;B21).

У комірку C30 слід ввести формулу =B^30-COS(B30), яка обчислює значення функції $f(x_n)$ у точці x_n.

У комірку D30 – формулу =2*B30+SIN(B30), яка обчислює значення першої похідної $f'(x_n)$ у точці x_n.

У комірку E30 слід ввести формулу =B30-C30/D30, яка обчислює значення чергового наближення, у комірку B31 – формулу =E30.

Для виведення значення кореня в комірку F30 слід ввести формулу–
для **MS Excel**: =ЕСЛИ(ABS(C30)<=$B$19*$B$26;"Корінь x="&ОКРУГЛ(E30;4);"");
для **OO Calc:** =IF(ABS(C30)<=$B$19*$B$26;"Корінь x="&ROUND(E30;4);"").

Далі потрібно виділити діапазон B30:F30 та скопіювати формули до діапазону B31:F31.

Потім виділяємо діапазон A31:F31 та протягуємо за **маркер заполнения** до тих пір, поки не буде знайдено корінь (Рис. 2. 15).

	A	B	C	D	E	F	G	H
16								
17	***Метод дотичних***							
18								
19	Точність ε=	0,0001						
20								
21	*a*=	0,8	f(*a*)=	-0,05671	f''(*a*)=	2,69671	f(*a*)*f''(a)=	-0,15292
22	*b*=	0,9						
23								
24	|f'(*a*)|=	2,31736						
25	|f'(*b*)|=	2,58333						
26	*m*=	2,31736						
27								
28								
29	*n*	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	x_{n+1}			
30	0	0,90000	0,18839	2,58333	0,82707			
31	1	0,82707	0,00702	2,39010	0,82414			
32	2	0,82414	0,00001	2,38224	0,82413	Корінь x=0,8241		

Рис. 2. 15

Наближений додатній корінь рівняння, який знайдено методом дотичних, $x \approx 0{,}8241$.

Метод простої ітерації. Іншим представником ітераційних методів є метод **простої ітерації**. В цьому методі рівняння (2.1) замінюється рівносильним рівнянням $x = \varphi(x)$ та будується послідовність значень

$$x_n = \varphi(x_{n-1}) \quad n = 1,2,..., \qquad (2.4)$$

де x_0 − початкове наближене значення шуканого кореня.

За певних умов кожне повторення операції обчислення за формулою (2.4) дає можливість знайти більш близьке до шуканого кореня його наближене значення.

Можливі два випадки:

1. Послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ збігається, тобто має границю, і тоді ця границя є коренем рівняння $f(x) = 0$.
2. Послідовність $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ розбігається, тобто не має границі.

Зазначимо відому теорему, що виражає умову, за якою ітераційний процес збігається. Нехай функція $\varphi(x)$ визначена і має неперервну похідну $\varphi'(x)$ на деякому відрізку $[a,b]$, при чому всі її значення належать цьому відрізку. Тоді, якщо існує правильний дріб r такий, що для усіх $x \in [a,b]$ виконується умова

$$|\varphi'(x)| \le r < 1, \tag{2.5}$$

то:

1) ітераційний процес $x_n = \varphi(x_{n-1})$ збігається незалежно від початкового значення $x_0 \in [a,b]$;

2) границя послідовності $x_0, x_1, ..., x_n, ...$ є єдиним коренем рівняння $f(x) = 0$ на $[a,b]$, тобто $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$, де x^* − точний корінь.

Слід зауважити, що ця теорема вказує на достатні умови збіжності ітераційного процесу. Умова (2.5) теореми не є необхідною, тобто ітераційний процес може бути збіжним і тоді, коли вона не виконується.

Геометрична інтерпретація процесу наведена на Рис. 2. 16. Тут перший рисунок (а) демонструє наближення до кореня, а другий (б) є ілюстрацією процесу, що розбігається ($|\varphi'(x)| > 1$).

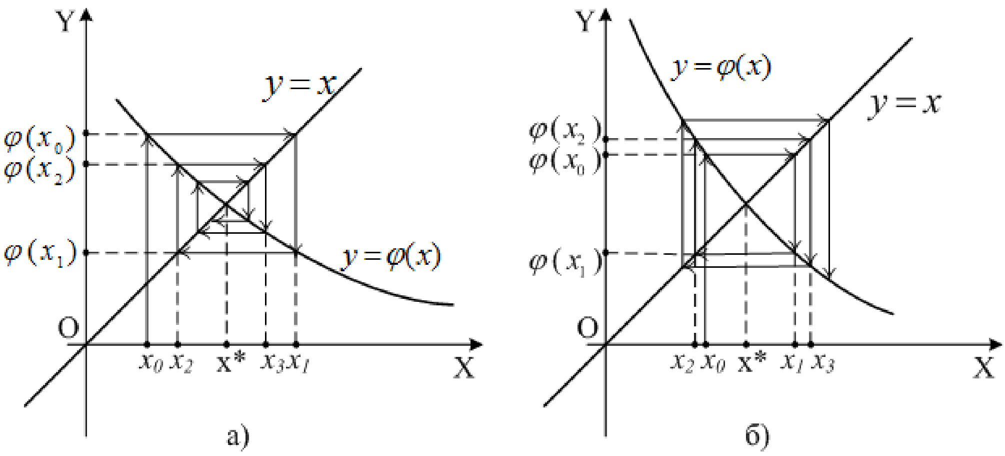


Рис. 2. 16

Збіжність методу простої ітерації забезпечується вибором функції $\varphi(x)$ та початкового наближення x_0.

Спосіб запису $x=\varphi(x)$ має велике значення: в одних випадках $|\varphi'(x)|$ є малою величиною в околі шуканого кореня, в інших − великою. Для метода простої ітерації треба брати ті представлення, при яких виконується нерівність (2.5), при чому чим менше число r, тим скоріше послідовні наближення збігаються до кореня x^*.

Вкажемо один досить загальний спосіб приведення рівняння (2.1) до вигляду $x=\varphi(x)$, для якого забезпечено виконання нерівності (2.5).

Нехай шуканий корінь x^* належить відрізку $[a,b]$, при чому $0<m\le f'(x)\le M$ для $a\le x\le b$. Помноживши обидві частини рівняння на $k>0$, представляємо його у вигляді $x-x+kf(x)=0$. Звідси маємо $\varphi(x)=x-kf(x)$.

Якщо похідна $f'(x)$ від'ємна, то замість рівняння $f(x)=0$ розглядаємо рівняння $-f(x)=0$. Підбираємо параметр k таким чином, щоб в околі кореня x^* виконувалась нерівність

$$0\le\varphi'(x)=(x-kf(x))'=1-kf'(x)\le r<1.$$

Враховуючи нерівність $0<m\le f'(x)\le M$ маємо

$$0\le 1-kM\le 1-kf'(x)\le 1-km\le r<1,$$

звідси $1-kM \le 1-km \le r < 1$.

Розглянувши нерівності $1-kM \ge 0$ та $1-km \le r$, бачимо, що в якості k можна взяти число $k = \frac{1}{M}$, тоді $r = 1-km = 1-\frac{m}{M} < 1$.

За m можна взяти найменше значення похідної $f'(x)$ на відрізку $[a,b]$, при чому воно повинно бути додатним, а за M − найбільше значення похідної на $[a,b]$[5].

Функція $\varphi(x)$ приймає вигляд $\varphi(x) = x - \frac{f(x)}{M}$ і ітераційна формула

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{M} \quad n = 0,1,2,...$$

забезпечує збіжний процес.

За нульове наближення x_0 можна прийняти значення на одному із кінців відрізку, або значення в середині відрізку ($x_0 = a$, $x_0 = b$, $x_0 = \frac{a+b}{2}$) або значення в будь-який точці відрізку, визначене з певних міркувань.

Якщо число r визначається із умови $|\varphi'(x)| \le r < 1$, то критерієм завершення ітераційного уточнення кореня із заданою точністю ε є умова

$$|x^* - x_n| \le \frac{\varepsilon(1-r)}{r}.$$

Для практичних обчислень в якості числа r обирають найбільше значення першої похідної функції $\varphi'(x)$ на проміжку ізоляції кореня, тобто $r = \max|\varphi'(x)|$ при $a \le x \le b$.

Зазначимо, що існують також інші методи (найшвидшого спуску, Ейткена-Стеффенсена, Вегстейна, Рибакова і т.д.) для уточнення коренів, які мають високу швидкість збіжності.

[5] Зазвичай на практиці обирають $M \ge \max|f'(x)|$, $m \le \min|f'(x)|$ на відрізку $[a,b]$.

Приклад 9. Уточнити один з коренів рівняння $\sqrt{x} - \cos x = 0{,}25$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. Приведемо рівняння до загального вигляду $f(x) = 0$.

$\sqrt{x} - \cos x - 0{,}25 = 0$, $f(x) = \sqrt{x} - \cos x - 0{,}25$.

Інтервал ізоляції кореня[6] $[0{,}5;1{,}5]$. Для уточнення кореня приведемо рівняння $f(x) = 0$ до вигляду $x = \varphi(x)$, де $\varphi(x) = x - f(x)$.

$$\varphi(x) = x - f(x) = x - (\sqrt{x} - \cos x - 0{,}25) = x - \sqrt{x} + \cos x + 0{,}25.$$

Необхідно перевірити критерій збіжності метода ітерацій. Якщо функція $\varphi(x)$ визначена і має неперервну похідну на деякому інтервалі, причому $|\varphi'(x)| < 1$, то ця послідовність збігається до кореня рівняння $x = \varphi(x)$ на цьому інтервалі.

Знайдемо $\varphi'(x) = 1 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \sin x$.

$$|\varphi'(0{,}5)| = \left|1 - \frac{1}{2\sqrt{0{,}5}} - \sin(0{,}5)\right| \approx 0{,}18653 < 1,$$

$$|\varphi'(1{,}5)| = \left|1 - \frac{1}{2\sqrt{1{,}5}} - \sin(1{,}5)\right| \approx 0{,}40574 < 1.$$

$|\varphi'(x)| < 1$ на інтервалі ізоляції кореня $[0{,}5;1{,}5]$.

Таким чином, ітераційний процес буде збіжним.

Далі для уточнення кореня рівняння методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою електронних таблиць необхідно заповнити комірки табличного процесора наступним чином (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**).

В комірку C3 ввести точність знаходження кореня 0,0001.

Далі потрібно заповнити шапку таблиці (Рис. 2. 17)

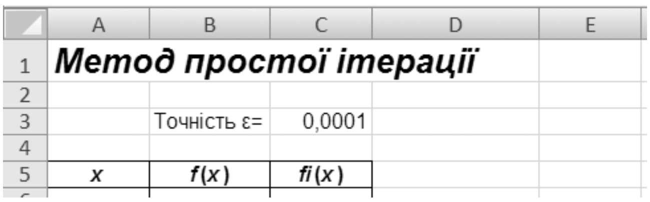


Рис. 2. 17

[6] Інтервал ізоляції може бути визначено будь-яким із вищезазначених способів.

Потім у комірку A7 слід ввести значення 0,5 – ліву границю інтервалу ізоляції кореня.

У комірку B7 вводиться формула для визначення $f(x)$ ==КОРЕНЬ(A7)-COS(A7)-0,25.

У комірку C7 слід ввести формулу для визначення $fi(x)$ =A7-B7.

Процес уточнення кореня слід завершити тоді, коли умова $|x^* - x_n| \le \frac{\varepsilon(1-r)}{r}$ буде виконана. Для цього обчислимо $r = \max|\varphi'(x)|$ при $a \le x \le b$. Функція на проміжку $[a,b]$ монотонна, тому можна обчислити значення модуля першої похідної функція на кінцях інтервалу ізоляції $|\varphi'(a)|$ та $|\varphi'(b)|$, та обрати найбільше значення.

Введемо у комірку G3 формулу =ABS(1-1/(2*КОРЕНЬ(E3))-SIN(E3)), у комірку G4 =ABS(1-1/(2*КОРЕНЬ(E4))-SIN(E4)). У комірку E6 введемо =МАКС(G3:G4).

Для виведення значення кореня в комірку D7 слід ввести формулу–
для **MS Excel**: =ЕСЛИ(ABS(A7-A6)<$C$3*(1-$E$6)/$E$6;"Корінь x="&ОКРУГЛ(A7;4);"")
для **OO Calc**: =IF(ABS(A7-A6)<$C$3*(1-$E$6)/$E$6;"Корінь x="& ROUND(A7;4);"")

Потім потрібно виділити діапазон A7:D7 та протягнути за **маркер заповнення** до тих пір, поки не буде знайдено корінь (Рис. 2. 18).

	A	B	C	D	E	F	G
1	***Метод простої ітерації***						
2							
3		Точність ε=	0,0001	***a=***	0,5	**|*fi*'(*a*)|=**	0,18653
4				***b=***	1,5	**|*fi*'(*b*)|=**	0,40574
5	***x***	***f*(*x*)**	***fi*(*x*)**				
6				***r=***	0,40574		
7	0,50000	-0,42048	0,92048				
8	0,92048	0,10397	0,81650				
9	0,81650	-0,03117	0,84767				
10	0,84767	0,00896	0,83871				
11	0,83871	-0,00261	0,84132				
12	0,84132	0,00076	0,84056				
13	0,84056	-0,00022	0,84078				
14	0,84078	0,00006	0,84072				
15	0,84072	-0,00002	0,84074	Корінь x=0,8407			

Рис. 2. 18

Наближений додатний корінь рівняння $\sqrt{x} - \cos x = 0{,}25$, який знайдено методом простої ітерації, $x \approx 0{,}8407$.

Приклад 10. Уточнити один з коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$ методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. $f(x) = x^2 - \cos x$. Інтервал ізоляції кореня $[0{,}8;0{,}9]$.

Для уточнення кореня приведемо рівняння $f(x)=0$ до вигляду $x=\varphi(x)$, де $\varphi(x)=x-f(x)$.

$$\varphi(x)=x-f(x)=x-(x^2-\cos x)=x-x^2+\cos x$$

Перевіримо критерій збіжності метода ітерацій, тобто чи виконується умова $|\varphi'(x)|<1$ на інтервалі ізоляції кореня $[0{,}8;0{,}9]$.

Знайдемо $\varphi'(x)=1-2x-\sin x$.

$$|\varphi'(0{,}8)|=|1-2*0{,}8-\sin(0{,}8)|\approx 1{,}3174>1,$$

$$|\varphi'(0{,}9)|=|1-2*0{,}9-\sin(0{,}9)|\approx 1{,}5833>1.$$

$|\varphi'(x)|>1$ на інтервалі ізоляції кореня.

Таким чином, ітераційний процес буде розбіжним.

Для того, щоб забезпечити збіжність процесу, помножимо обидві частини рівняння на $k=\dfrac{1}{M}>0$ та представимо його у вигляді $x-x+kf(x)=0$. Звідси маємо $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{M}$

Зазвичай, на практиці обирають $M\geq \max|f'(x)|$ на відрізку $[a,b]$.

$$f'(x)=2x+\sin x.$$

$$|f'(0{,}8)|=2*0{,}8+\sin(0{,}8)\approx 2{,}3174,$$

$$|f'(0{,}9)|=2*0{,}9+\sin(0{,}9)\approx 2{,}5833,$$

Отже можна обрати $M=3$, рівняння матиме вигляд $\dfrac{x^2-\cos x}{3}=0$

Перевіримо умову збіжності метода ітерацій для отриманого рівняння.

$$f(x)=\frac{x^2-\cos x}{3},$$

$$\varphi(x)=x-f(x)=x-\frac{1}{3}(x^2-\cos x).$$

$$\varphi'(x)=1-f'(x)=1-\frac{1}{3}(2x+\sin x).$$

$$|\varphi'(0{,}8)|=\left|1-\frac{1}{3}(2*0{,}8+\sin(0{,}8))\right|\approx 0{,}2275<1,$$

$$|\varphi'(0{,}9)|=\left|1-\frac{1}{3}(2*0{,}9+\sin(0{,}9))\right|\approx 0{,}1389<1.$$

Таким чином, ітераційний процес буде збіжним.

Для уточнення кореня рівняння $x^2 - \cos x = 0$ на інтервалі ізоляції [0,8;0,9] методом простої ітерації з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою електронних таблиць необхідно заповнити комірки табличного процесора як описано у ***Прикладі 9.*** (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**).

Процес уточнення кореня слід завершити тоді, коли умова $|x^* - x_n| \le \dfrac{\varepsilon(1-r)}{r}$ буде виконана. Для цього обчислимо $r = 1 - \dfrac{m}{M}$, де $M \ge \max|f'(x)|$, $m \le \min|f'(x)|$ на відрізку $[0{,}8{,}0{,}9]$.

Введемо у комірку H3 формулу =ABS(2*F3+SIN(F3)), у комірку H4 =ABS(2*F4+SIN(F4)). У комірку F6 введемо =ОКРУГЛВВЕРХ(МАКС(H3:H4);0), у комірку F7 =ОКРУГЛВНИЗ(МИН(H4:H5);0) (функції ОКРУГЛВВЕРХ() та ОКРУГЛВНИЗ() використовуються в тих випадках, коли результат обчислень має бути найближчим більшим або найближчим меншим цілим числом), у комірку F8 =1-F7/F6.

Для виведення значення кореня в комірку D7 слід ввести формулу – для **MS Excel**: =ЕСЛИ(ABS(A7-A6)<$C$3*(1-$F$8)/$F$8;"Корінь x="&ОКРУГЛ(A7;4);"")
для **OO Calc**: =IF(ABS(A7-A6)<$C$3*(1-$F$8)/$F$8;"Корінь x="& ROUND(A7;4);"")

Потім потрібно виділити діапазон A7:D7 та протягнути за **маркер заповнення** до тих пір, поки не буде знайдено корінь (Рис. 2. 19).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*Метод простої ітерації*							
2								
3		Точність ε=	0,0001		**a=**	0,8	**|fi'(a)|=**	2,31736
4					**b=**	0,9	**|fi'(b)|=**	2,58333
5	***x***	***f(x)***	***fi(x)***					
6					**M=**	3		
7	0,80000	-0,01890	0,81890		**m=**	2		
8	0,81890	-0,00414	0,82304		**r=**	0,33333		
9	0,82304	-0,00086	0,82391					
10	0,82391	-0,00018	0,82409					
11	0,82409	-0,00004	0,82412	Корінь x=0,8241				

Рис. 2. 19

Наближений додатний корінь рівняння, який знайдено методом простої ітерації, $x \approx 0{,}8241$.

Вбудований інструмент ***Подбор параметра***. Розв'язання багатьох практичних, особливо інженерних задач, потребує знаходження числових значень параметрів функцій, що забезпечують отримування очікуваних значень функції. Як правило, це мають бути екстремальні величини або конкретні значення.

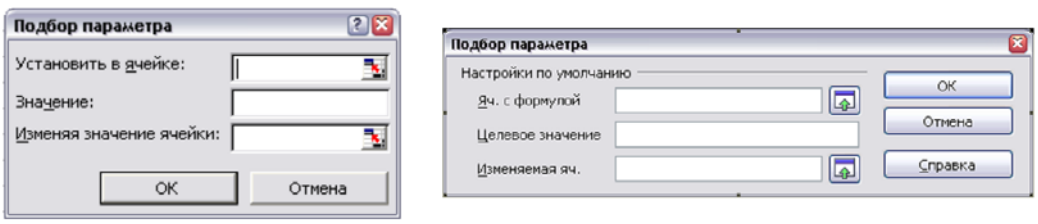
Існують вбудовані інструменти електронних таблиць, які повинні спрощувати користувачу пошук цих параметрів, наприклад **Подбор параметра**.

Подбор параметра – це інструмент, який дозволяє цілеспрямовано перебрати багато значень одиночного параметру з одночасним контролем кінцевого значення функції.

Цей механізм "підганяє" початкові дані під відповідь, яка бажана. При цьому чергове наближення параметру підставляється у формулу, виконується обчислення та отриманий результат значення функції порівнюється з цільовим значенням, яке шукають. Якщо на черговому кроці обчислень різниця між поточним результатом і значенням, яке шукають стала менше за задану величину, тобто досягнута задана точність, то обчислення припиняються, та поточне значення пропонується як підсумковий результат добору.

Різниця між ним і "ручним" добором полягає у тому, що він виконує розрахунки значно скоріше та з достатньою точністю (для інженерних та наукових обчисленнях на точність отриманих результатів та на розрядність представлення результатів потрібно звернути особливу увагу).

В обох табличних процесорах, які розглядаються (**MS Excel** і **OO Calc**) інструмент **Подбор параметра** можна визвати командою **Подбор параметра** меню **Сервис** (Рис. 2. 20).



а) MS Excel б) Calc

Рис. 2. 20

Установить в ячейке (**Яч. с формулой**) – це поле діалогового вікна повинне містити адресу, або ім′я комірки, яка містить формулу, до якої слід підібрати параметр.

Значение (**Целевое значение**) – це поле повинно містити значення, яке бажано. Ця комірка ще називається *цільовою* через те, що її вміст являє собою формульний запис цільової функції. **Цільова функція** – це функція, значення якої повинно досягнути бажаного (конкретного або екстремального) значення.

Изменяя значение ячейки (**Изменяемая яч**.) – повинно містити адресу або ім′я комірки, вміст якої буде змінюватись у процесі добору параметра. Ця комірка повинна бути такою, що впливає на комірку з формулою, прямо чи побічно.

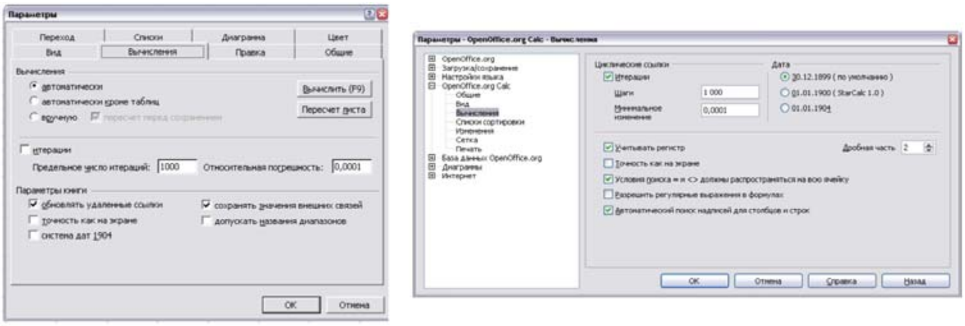
Вводити посилання зручно указуючи ″мишею″ на відповідну комірку. У цьому випадку табличний редактор автоматично переводить їх у абсолютні.

Вміст комірки, що змінюється може бути порожнім, у цьому випадку значення передбачається рівним нулю, однак бажано, щоб користувач, виходячи з апріорних знань про характер залежності, визначив деяке початкове значення параметру. Від цього початкового наближення залежить не лише швидкість отримання результату, а також і саме значення, особливо у випадку нелінійної залежності і множинних рішень.

Якщо підбір параметру завершено успішно, на екран буде виведено відповідне вікно, де вказано результат.

При натисканні кнопки **ОК** (**Да**), значення аргументу, яке підібрано буде збережено у комірці аргументу, при натисканні **Отмена** (**Нет**) буде відновлено попередній вміст комірки. Якщо добір параметру завершується не успішно, видається відповідне повідомлення.

Слід зауважити, що при доборі параметра практично завжди отримують наближені значення результату. Для інженерних розрахунків важливі значення відносної похибки та граничної кількості ітерацій. Встановити ці значення можна за допомогою команди **Параметры** меню **Сервис** (Рис. 2. 21).



а) MS Excel б) Calc

Рис. 2. 21

Якщо параметр, що підбирають та комірку з цільовою формулою пов′язують складні нелінійні функції, може скластися ситуація, коли не одне, а декілька значень параметра відповідають значенню цільової комірки, що шукають.

Найпростіший приклад подібної ситуації можна розглянути на прикладі квадратичної залежності $y = 10 - x^2$. Два значення параметру x ($x = -2$ та $x = 2$) відповідають значенню, яке шукають $y = 6$. Вирішальну роль у тому, яке значення буде знайдено у результаті добору, відіграє початкове значення параметра. Тобто, при від′ємних початкових значеннях x буде знайдено значення $x = -2$, яке забезпечує $y = 6$, а при нульовому та додатних значеннях x буде отримано значення $x = 2$, яке також забезпечує $y = 6$.

У загальному випадку для довільної багатоекстремальної функції результат добору параметрів вирішальним чином залежить від початкового значення параметра. Для таких випадків доцільно побудувати графік цільової функції, щоб зробити початкові припущення про можливий діапазон значень параметра.

Приклад 11. Уточнити один з коренів рівняння $x^2 - \cos x = 0$ за допомогою інструменту **Подбор параметра** з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$.

Розв'язок. Для уточнення кореня рівняння $x^2 - \cos x = 0$ на інтервалі ізоляції кореня [0,8;0,9] з точністю $\varepsilon = 10^{-4}$ за допомогою інструменту **Подбор параметра** необхідно заповнити комірки табличного процесора як показано на Рис. 2. 22 наступним чином (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**).

В комірку A4 ввести серединне значення параметра на інтервалі ізоляції 0,85. В комірку B4 – формулу для обчислення значення функції в цій точці =A4^2-COS(A4).

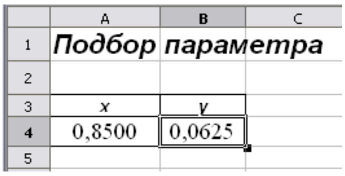
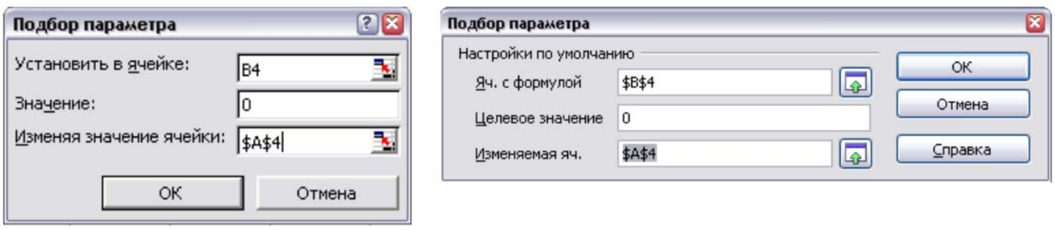


Рис. 2. 22

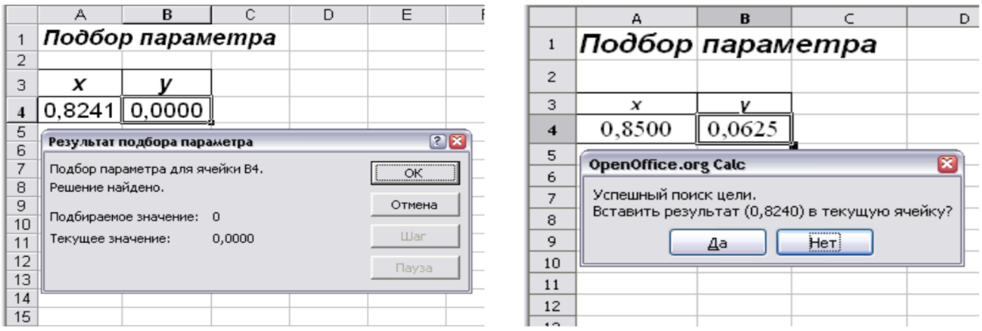
Тепер потрібно задати відносну похибку та межову кількість ітерацій, для цього на вкладці **Вычисления** діалогового вікна **Параметры,** що запускається командою **Параметры** меню **Сервис** (Рис. 2. 21). Задані відносна похибка 0,0001 та межова кількість ітерацій 1000. Крім того, потрібно встановити форматування комірок так, щоб число було показано чотири знака після коми. Далі потрібно обрати команду **Подбор параметра** в меню **Сервис** та заповнити діалогове вікно як показано на Рис. 2. 23.



а) MS Excel б) Calc

Рис. 2. 23

Після натискання кнопки **ОК** діалогового вікна **Подбор параметра** на екран буде виведено діалогове вікно результату (Рис. 2. 24).



а) MS Excel б) Calc

Рис. 2. 24

Потім треба натиснути кнопку **ОК** (**Да**). Значення аргументу, яке підібрано буде збережено у комірці аргументу (Рис. 2. 25).

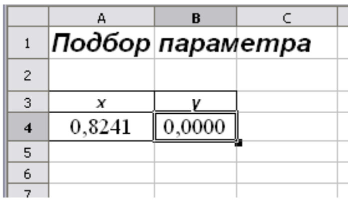


Рис. 2. 25

Отже, наближений додатний корінь рівняння, який знайдено за допомогою інструмента **Подбор параметра** $x \approx 0{,}8241$.

Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Поняття системи алгебраїчних лінійних рівнянь та її розв'язок. Матрична форма запису системи лінійних рівнянь. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.

Поняття системи алгебраїчних лінійних рівнянь та її розв'язок

Система лінійних алгебраїчних рівнянь. Система m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (***СЛАР***) в лінійній алгебрі – це система рівнянь вигляду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{3.1}$$

де $x_1, x_2, ..., x_n$ – невідомі, які потрібно визначити;

$a_{11}, a_{12}, ..., a_{mn}$ – коефіцієнти системи;

$b_1, b_2, ..., b_n$ – вільні члени.

Коефіцієнти системи та вільні члени вважаються відомими. Кожний коефіцієнт системи a_{ij} має два індекси, перший з яких i є номером рівняння, а другий j – номером невідомого, біля якого стоїть цей коефіцієнт.

СЛАР (3.1) називається ***однорідною***, якщо всі її вільні члени дорівнюють нулю ($b_1 = b_2 = ... = b_n = 0$), і ***неоднорідною***, якщо хоч би один з них відмінний від нуля.

СЛАР (3.1) називається ***квадратною***, якщо число m рівнянь дорівнює числу n невідомих.

Розв'язок СЛАР. Упорядкований[7] набір чисел $c_1, c_2, ..., c_n$ називається ***розв'язком*** СЛАР (3.1), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих $x_1, x_2, ..., x_n$ усі рівняння цієї системи перетворюються на тотожності.

СЛАР (3.1) називається ***сумісною***, якщо вона має хоча б один розв'язок, та ***несумісною***, якщо у неї немає жодного розв'язку.

Сумісна СЛАР вигляду (3.1) може мати один чи більше розв'язків.

Два розв'язки $c_1^{(1)}, c_2^{(1)}, ..., c_n^{(1)}$ та $c_1^{(2)}, c_2^{(2)}, ..., c_n^{(2)}$ сумісної СЛАР вигляду (3.1) називаються ***різними***, якщо порушується хоча б одна з рівностей $c_1^{(1)} = c_1^{(2)}$, $c_2^{(1)} = c_2^{(2)}$, …, $c_n^{(1)} = c_n^{(2)}$.

Сумісна СЛАР вигляду (3.1) називається ***визначеною***, якщо вона має один розв'язок. Сумісна СЛАР вигляду (3.1) називається ***невизначеною***, якщо вона має хоча б два різних розв'язки. Якщо рівнянь більше, ніж невідомих, СЛАР називається ***перевизначеною***.

[7] Множина чисел $a_1, a_2, ..., a_n$ називається ***упорядкованою***, якщо вказано порядок слідування цих чисел.

Дві СЛАР називаються ***еквівалентними***, якщо вони мають одну й ту ж множину розв'язків.

Матрична форма запису системи лінійних рівнянь

Досить зручно записувати СЛАР (3.1) в матричній формі. Для цього використовується поняття множення двох узгоджених матриць. Дві матриці називаються ***узгодженими***, якщо кількість стовпців першої матриці дорівнює кількості рядків другої із матриць.

Введемо матриці:

Першу, яка має m рядків і n стовпців і складена із коефіцієнтів біля невідомих СЛАР (3.1):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (3.2)$$

Таку матрицю називають ***основною матрицею СЛАР (3.1)***.

Другою буде матриця X, що має n рядків і один стовпець і складена з невідомих СЛАР (3.1):

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}. \qquad (3.3)$$

Відповідно правилу множення двох матриць добуток AX матриці (3.2) на матрицю (3.3) є матриця, яка має n рядків і один стовпець наступного вигляду

$$AX = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \qquad (3.4)$$

Очевидно, що елементи матриці (3.4) є лівими частинами рівнянь СЛАР (3.1).

Якщо записати вільні члени СЛАР (3.1) у вигляді матриці-стовпця

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \qquad (3.5)$$

то система рівностей (3.1) означає, що відповідні елементи матриць (3.4) та (3.5) рівні між собою. А із цього за означенням рівності двох матриць, випливає, що матриця AX дорівнює матриці B.

Отже, СЛАР (3.1) можна записати еквівалентним їй матричним рівнянням $AX = B$.

Інакше

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Всі методи розв'язання СЛАР можна поділити на дві групи: точні методи та ітераційні методи.

Точний метод розв'язання дозволяє одержати точні значення невідомих в результаті проведення скінченного числа арифметичних операцій (наприклад, метод Крамера). ***Ітераційні методи*** дозволяють одержати шуканий розв'язок у вигляді границі послідовності наближень, побудова яких здійснюється за допомогою ітераційного процесу.

Метод Крамера (*Правило Крамера*). Метод Крамера[8] застосовується для розв'язання квадратних СЛАР з визначником основної матриці, що не дорівнює нулю.

Доведено, що така система має розв'язок, причому тільки один.

[8] Крамер Габриель (1704-1752) – швейцарський математик, розробив метод в 1750 році.

Нехай дана квадратна СЛАР:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{3.7}$$

з відмінним від нуля визначником Δ основної матриці A

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{3.8}$$

Розв'язок такої системи знаходиться за формулами Крамера:

$$x_i = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{3,i+1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \tag{3.9}$$

де Δ – визначник основної матриці A;

Δ_i – визначники, які утворюються з визначника Δ заміною i-го стовпця стовпцем із вільних членів (без зміни інших стовпців).

Наприклад, Δ_1 – визначник, який утворюється з визначника Δ заміною першого стовпця стовпцем із вільних членів:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & ... & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ b_n & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

За аналогією можна знайти всі інші Δ_i $(i = 1, 2, ..., n)$.

Формули (3.9) можна записати в розгорнутому вигляді

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ ...,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \tag{3.10}$$

Сукупність значень $x_1, x_2, ..., x_n$ є розв'язком системи (3.7)

Через високу обчислювальну складність метода – потрібно обчислення $n+1$ визначника розмірності $n \times n$, він не застосовується для машинного розв'язання великих СЛАР. Проте, він іноді застосовується для ручного розрахунку та в теоретичних викладках.

Приклад 12. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ за формулами Крамера.

Розв'язок. Метод Крамера застосовується для розв'язання квадратних СЛАР з визначником основної матриці, що не дорівнює нулю. Задана СЛАР складається з трьох рівнянь з трьома невідомими, тобто $m = n = 3$ і відповідає означенню квадратної. Тепер слід перевірити чи дорівнює визначник основної матриці нулю.

Для цього запишемо основну матрицю СЛАР у діапазон комірок B3:D5 табличного процесора як показано на Рис. 3. 1. (Послідовність операцій однакова і для **MS Excel** і для **OO Calc**).

Знайдемо визначник Δ основної матриці A. Запишемо основну матрицю в діапазон B8:D10. Формулу для обчислення визначника введемо у комірку F9

для **MS Excel**: =МОПРЕД(B8:D10);

для **OO Calc**: =MDETERM(B8:D10).

Функція **МОПРЕД** (для **OO Calc** – **MDETERM**) повертає визначник матриці.
Синтаксис функцій:
для **MS Excel**: **МОПРЕД(массив)**,
для **OO Calc**: **MDETERM(массив)**,
де **массив** – це квадратний масив для отримання визначника.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за формулами Крамера**										
2		Коефіцієнти СЛАР								Вільні члени	
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7											
8		2	4	3							
9	Δ=	1	3	2	=	10					
10		3	-5	4							

Рис. 3. 1

Визначник основної матриці $\Delta = 10 \neq 0$. Отже цю СЛАР можна розв'язати за формулами Крамера.

Знайдемо Δ_1 (Рис. 3. 2). Для цього введемо в діапазон комірок B12:D14 коефіцієнти основної матриці та замінимо перший стовпець стовпцем із вільних членів, у комірку F13 введемо формулу для розрахунку визначника:

для **MS Excel**: =МОПРЕД(B8:D10);

для **OO Calc**: =MDETERM(B8:D10).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за формулами Крамера**										
2			Коефіцієнти СЛАР							Вільні члени	
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7											
8		2	4	3							
9	Δ=	1	3	2	=	10					
10		3	-5	4							
11											
12		1	4	3							
13	Δ_1=	4	3	2	=	-103					
14		1	-5	4							

Рис. 3. 2

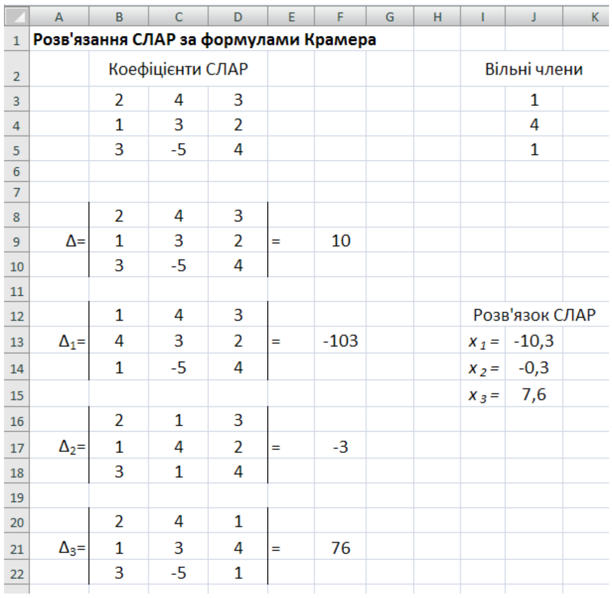
Аналогічно знаходимо інші визначники (Рис. 3. 3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за формулами Крамера**										
2			Коефіцієнти СЛАР							Вільні члени	
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7											
8		2	4	3							
9	Δ=	1	3	2	=	10					
10		3	-5	4							
11											
12		1	4	3							
13	Δ_1=	4	3	2	=	-103					
14		1	-5	4							
15											
16		2	1	3							
17	Δ_2=	1	4	2	=	-3					
18		3	1	4							
19											
20		2	4	1							
21	Δ_3=	1	3	4	=	76					
22		3	-5	1							

Рис. 3. 3

Розв'язком СЛАР є сукупність значень x_1, x_2, x_3, де $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta}$, $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}$.

Для визначення x_1 введемо в комірку J13 формулу =F13/$F$9, для знаходження x_2 – J17=F17/$F$9, x_3 – J21=F21/$F$9. Розв′язок СЛАР знайдено (Рис. 3. 4) $x_1 = -10{,}3$; $x_2 = -0{,}3$; $x_3 = 7{,}6$.



	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за формулами Крамера**										
2			Коефіцієнти СЛАР							Вільні члени	
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7											
8		2	4	3							
9	Δ=	1	3	2	=	10					
10		3	-5	4							
11											
12		1	4	3						Розв'язок СЛАР	
13	Δ$_1$=	4	3	2	=	-103			x_1 =	-10,3	
14		1	-5	4					x_2 =	-0,3	
15									x_3 =	7,6	
16		2	1	3							
17	Δ$_2$=	1	4	2	=	-3					
18		3	1	4							
19											
20		2	4	1							
21	Δ$_3$=	1	3	4	=	76					
22		3	-5	1							

Рис. 3. 4

Матричний спосіб. Нехай дана система (3.7) n лінійних рівнянь з n невідомими, яка має визначник основної матриці, що не дорівнює нулю.

Систему (3.7) можна замінити еквівалентним їй матричним рівнянням

$$AX = B, \tag{3.11}$$

де A – основна матриця системи;

X – матриця-стовпець невідомих, які необхідно визначити;

B – матриця-стовпець вільних членів.

Таким чином,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Матричне рівняння (3.11) розв'язується так. Обидві частини рівняння (3.11) помножуються зліва[9] на матрицю A^{-1}, обернену до матриці A (за умовою визначник Δ матриці A відмінний від нуля, отже матриця A має обернену матрицю A^{-1}).

[9] Множення рівняння (3.11) на матрицю A^{-1} справа нічого не дає, тому що переставляти в добутку матриць матриці місцями не можна, отже $(AX)A^{-1} = AXA^{-1} \neq AA^{-1}X$.

Таким чином, $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Використовуючи властивість добутку трьох матриць, маємо $(A^{-1}A)X = A^{-1}B$. Оскільки, $A^{-1}A = E$, де E – одинична матриця, одержуємо рівність $EX = A^{-1}B$. Але $EX = X$, звідси

$$X = A^{-1}B \tag{3.13}$$

Формулу (3.13) називають матричним записом розв'язку СЛАР (3.7) або розв'язком матричного рівняння (3.11).

Приклад 13. Розв'язати систему лінійних алгебраїчних рівнянь $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ за допомогою оберненої матриці.

Розв'язок. Як відомо з ***Прикладу 12***, задана СЛАР з трьох лінійних рівнянь з трьома невідомими, яка має визначник основної матриці, що не дорівнює нулю.

Отже, СЛАР можна замінити еквівалентним їй матричним рівнянням (3.11). Таким чином,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -5 & 4 \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Запишемо ці матриці як показано на Рис. 3. 5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці**										
2		Основна матриця *A*						Матриця вільних членів *B*			
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	

Рис. 3. 5

Розв'язком матричного рівняння (3.11) є $X = A^{-1}B$.

Знайдемо обернену матрицю A^{-1} (Рис. 3. 6). Для цього слід виділити діапазон комірок B8:D10, в який буде повернена обернена матриця, натиснути знак рівності та ввести формулу

для **MS Excel**: =МОБР(B3:D5);

для **OO Calc**: = MINVERSE(B3:D5).

Функція **МОБР** (для **OO Calc** – **MINVERSE**) повертає обернену матрицю.

Синтаксис функцій:

для **MS Excel**: **МОБР(массив)**,

для **OO Calc**: **MINVERSE(массив)**,

де **массив** – це квадратний масив для отримання оберненої матриці.

Завершується введення формули масиву натисканням поєднання клавіш **SHIFT+CTRL+ENTER.**

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці**										
2		Основна матриця *A*						Матриця вільних членів *B*			
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7		Обернена матриця A^{-1}									
8		2,2	-3,1	-0,1							
9		0,2	-0,1	-0,1							
10		-1,4	2,2	0,2							

Рис. 3. 6

Далі знаходимо масив невідомих X : виділяємо діапазон комірок J8: J10 та вводимо формулу

для **MS Excel**: =МУМНОЖ(B8:D10; J3:J5);

для **OO Calc**: =MMULT(B8:D10; J3:J5),

завершуємо введення формули натисканням комбінації клавіш **SHIFT+CTRL+ENTER**.

Функція **МУМНОЖ** (для **OO Calc – MMULT**) виконує множення двох матриць.

Синтаксис функцій:

для **MS Excel**: **МУМНОЖ(массив 1; массив 2)**,

для **OO Calc**: **MMULT(массив; массив)**.

Кількість стовпців в масиві 1 повинна дорівнювати кількості рядків масиву 2.

Завершується введення формули масиву натисканням поєднання клавіш **SHIFT+CTRL+ENTER**, інакше буде повертатися тільки значення верхньої лівої комірки масиву (Для **OO Calc** при створенні формули масиву за допомогою **Мастера функций** слід кожного разу встановлювати **Масив**, щоб результати поверталися у виді масиву).

Масив невідомих знайдено (Рис. 3. 7).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	**Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці**										
2		Основна матриця *A*						Матриця вільних членів *B*			
3		2	4	3						1	
4		1	3	2						4	
5		3	-5	4						1	
6											
7		Обернена матриця A^{-1}								Матриця *X*	
8		2,2	-3,1	-0,1						-10,3	
9		0,2	-0,1	-0,1				*X*	=	-0,3	
10		-1,4	2,2	0,2						7,6	

Рис. 3. 7

Приклад 14. Переконатися, що знайдені розв′язки є вірними.

Розв'язок. У ***Прикладах 12-13*** була розв′язана СЛАР $\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$ та визначені невідомі $x_1 = -10{,}3$; $x_2 = -0{,}3$; $x_3 = 7{,}6$.

Щоб дізнатися чи є одержані значення невідомих розв′язком СЛАР, слід виконати перевірку. Для цього необхідно підставити отримані значення невідомих у рівняння (3.11), тобто при множенні основної матриці A на матрицю невідомих X, добутком має бути матриця вільних членів B.

Виділяємо діапазон М3:М5 та вводимо формулу

для **MS Excel**: =МУМНОЖ(B3:D5; J8:J10);

для **OO Calc**: =MMULT(B3:D5; J8:J10).

Завершуємо введення формули масиву натисканням поєднання клавіш **SHIFT+CTRL+ENTER**.

Результати наведено на Рис. 3. 8.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	**Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці**												
2		Основна матриця *A*						Матриця вільних членів *B*					Перевірка
3		2	4	3						1			1
4		1	3	2						4			4
5		3	-5	4						1			1
6													
7		Обернена матриця A^{-1}								Матриця *X*			
8		2,2	-3,1	-0,1						-10,3			
9		0,2	-0,1	-0,1				*X*	=	-0,3			
10		-1,4	2,2	0,2						7,6			

Рис. 3. 8

Додаток

Завдання до лабораторних робіт

Лабораторна робота № 1

Тема: *Побудова графіків функцій*

Мета: *Вивчити можливості табличних процесорів MS Excel та OpenOffice.orgCalc для побудови графіків функцій*

Завдання:

2. Визначити область існування функції $y = f(x)$ (Таблиця 1).
3. На інтервалі, який належить до області існування функції, розв′язати задачу табулювання функції $y = f(x)$ (Таблиця 1) та побудувати її графік. Інтервал та крок табулювання вибрати довільно.
4. Протабулювати функцію (Таблиця 2), яка задана в полярних координатах, для трьох значень коефіцієнтів та побудувати три графіка функцій в одній декартовій системі координат.

Лабораторна робота № 2

Тема: *Чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною*

Мета: *Вивчити можливості табличних процесорів MS Excel та OpenOffice.orgCalc для розв'язання нелінійних рівнянь з однією змінною, використовуючи чисельні методи*

Завдання:

1. Визначити інтервали ізоляції коренів рівняння $f(x) = 0$ (Таблиця 3).
2. Уточнити **один з дійсних коренів** рівняння ($\varepsilon = 10^{-4}$) наступними методами:

   ✓ методом ділення відрізку навпіл;

- ✓ методом хорд;
- ✓ методом дотичних;
- ✓ методом простої ітерації;
- ✓ за допомогою вбудованого інструмента електронних таблиць **Подбор параметра**.

3. Порівняти отримані результати та зробити висновки.

Лабораторна робота № 3

Тема: *Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

Мета: *Вивчити можливості табличних процесорів MS Excel та OpenOffice.orgCalc для розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь*

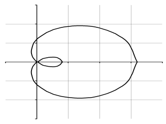
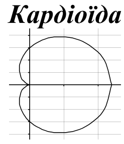
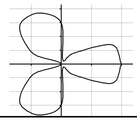
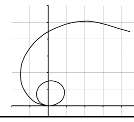
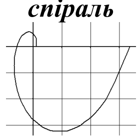
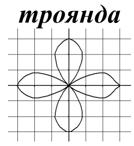
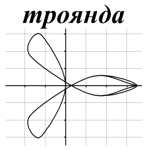
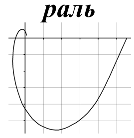
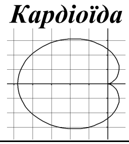
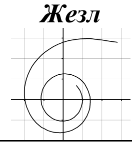
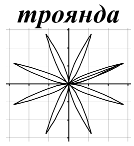
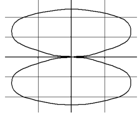
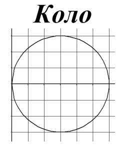
Завдання:

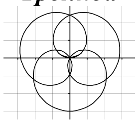
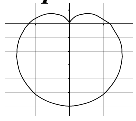
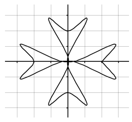
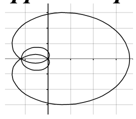
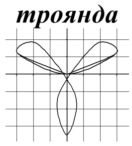
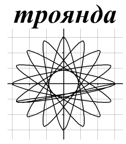
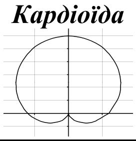
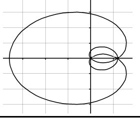
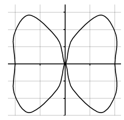
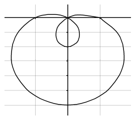
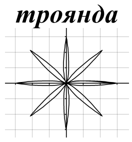
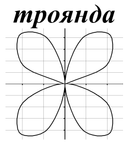
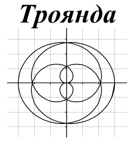
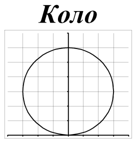
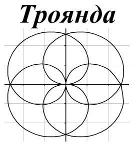
1. Розв′язати систему лінійних рівнянь (Таблиця 4):
   - ✓ за формулами Крамера;
   - ✓ матричним способом.
2. Переконатися, що найдені розв′язки є вірними.
3. Порівняти отримані результати та зробити висновки.

Таблиця 1

№ вар	Функція	№ вар	Функція
1.	$y=\sin^2 3x-\dfrac{(x+\cos x)^3}{\sqrt{\lvert x-1\rvert}}$	2.	$y=2x\sqrt{\lvert\cos(x^2+1)\rvert}+e^{-x}$
3.	$y=\cos x+\sqrt{\lvert x^2-\sqrt{\lvert x\rvert}\rvert}$	4.	$y=\sin^2 2x-e^x+\dfrac{x+1}{2+x^2}$
5.	$y=\sqrt{\lvert 4x+1\rvert}+\sin(2x+1)$	6.	$y=2\sin^2(x+1)-e^{x-5}$
7.	$y=\sin^2 2x+\cos(\sqrt{\lvert x\rvert}+\ln\lvert x\rvert)$	8.	$y=\cos^2 3x-\cos(\sqrt{\lvert x+\ln x\rvert})$
9.	$y=\sqrt{x^2+1}-\ln(x^2-1)$	10.	$y=2x\sqrt{\lvert\cos(x^2+1)-x\rvert}+e^{-2x}$
11.	$y=\sin^2 3x+\sqrt{\lvert\ln x-x^2\rvert}$	12.	$y=2\ln^2\lvert x^2-3x\rvert+e^{-\sqrt{\lvert x\rvert}}$
13.	$y=e^{-2x}-\sqrt{\lvert x^3-\sin^2 x\rvert}$	14.	$y=\ln^2(1+\sqrt{\lvert x\rvert})-e^{-x^2}$
15.	$y=0.2x^3-\sin^2 xe^{-2x}$	16.	$y=(x+\cos x)^3+\sin^2 3x+\dfrac{1}{x}$
17.	$y=\dfrac{\sqrt{\lvert x^2-x\rvert}}{\ln\lvert x^3\rvert}$	18.	$y=(x+\cos x)^3-\sqrt{\lvert x-\ln x\rvert}$
19.	$y=\sin^2 3x-\sqrt{\lvert x-\ln x\rvert}$	20.	$y=\dfrac{\sqrt{\lvert x^2\rvert}}{\ln^2\lvert 2x-1\rvert}+x^2$
21.	$y=-e^{x-5}+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$	22.	$y=\sin^3 2x-\cos(\sqrt{\lvert x\rvert}+\ln x)$
23.	$y=2x^2-\cos^3 xe^{-2x}$	24.	$y=\sqrt{\lvert 6x-1\rvert}-\cos(3x+1)$
25.	$y=\dfrac{x^2+\sqrt{\lvert x+1\rvert}}{x+1}$	26.	$y=0.5x+\sqrt{x^2+1}-\cos(1+x)$
27.	$y=\cos^3 2x-\sqrt{\lvert\ln x-x\rvert}$	28.	$y=\sin^2 3x+\sqrt{\lvert\ln x-x^2\rvert}$
29.	$y=\sqrt{\lvert x^2-\cos^2 x\rvert}-e^{-2x}$	30.	$y=e^{-2x}-\sqrt{\lvert x^3-\sin^2 x\rvert}$

Таблиця 2

№ вар	Функція	№ вар	Функція
1.	$\rho = 2a\cos\varphi + b$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 4, b_1 = 2;$ $a_2 = 5, b_2 = 3;$ $a_3 = 6, b_3 = 5.$ ***Равлик Паскаля*** 	2.	$\rho = 2a(1+\cos\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 8.$ ***Кардіоїда*** 
3.	$\rho = a(1+\cos 3\varphi) + b\sin^2 3\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 4, b_1 = 3;$ $a_2 = 3, b_2 = 2;$ $a_3 = 2, b_3 = 1.$ ***"Квітка"*** 	4.	$\rho = \dfrac{a\sin\varphi}{\varphi}$, де $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 7.$ ***Кохлеоїда*** 
5.	$\rho = a^{\varphi}$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 1.25;$ $a_2 = 1.5;$ $a_3 = 1.75.$ ***Логарифмічна спіраль*** 	6.	$\rho = a\cos 2\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 1;$ $a_2 = 2;$ $a_3 = 3.$ ***4-пелюсткова троянда*** 
7.	$\rho = a\cos 3\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 3;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 7.$ ***3-пелюсткова троянда*** 	8.	$\rho = ae^{b\varphi}$ де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 1, b_1 = 0.2;$ $a_2 = 2, b_2 = 0.5;$ $a_3 = 2, b_3 = 0.7.$ ***Рівномірна спіраль*** 
9.	$\rho = 2a(1-\cos\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 3;$ $a_2 = 4;$ $a_3 = 6.$ ***Кардіоїда*** 	10.	$\rho = {a}/{\sqrt{\varphi}}$, де $\dfrac{\pi}{4} \le \varphi \le 4\pi$ $a_1 = 3;$ $a_2 = 5;$ $a_3 = 7.$ ***Жезл*** 
11.	$\rho = a\sin 4\varphi$, де $0 \le \varphi \le 4\pi$ $a_1 = 5;$ $a_2 = 3;$ $a_3 = 2.$ ***8-пелюсткова троянда*** 	12.	$\rho = a\sqrt{\varphi} + b$, де $0 \le \varphi \le 4\pi$ $a_1 = 2, b_1 = 1;$ $a_2 = 3, b_2 = 2$ $a_3 = 4, b_3 = 3.$ ***Параболічна спіраль*** 
13.	$\rho = 2a(1-\cos 2\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2;$ $a_2 = 4;$ $a_3 = 6.$ ***Нефроїда*** 	14.	$\rho = 2a\cos\varphi$, де $-\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \dfrac{\pi}{2}$ $a_1 = 1;$ $a_2 = 2;$ $a_3 = 3.$ ***Коло*** 

№ вар	Функція	№ вар	Функція
15.	$\rho = a\sin(3/5\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 10\pi$ $a_1 = 1$; $a_2 = 3$; $a_3 = 5$. ***Троянда*** 	16.	$\rho = a(1-\sin\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$. ***Кардіоїда*** 
17.	$\rho = 2(1+\cos 4\varphi) + a\sin^2 4\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2$; $a_2 = 3$; $a_3 = 4$. ***"Квітка"*** 	18.	$\rho = a(1+2\cos(0.5\varphi))$, де $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$. ***Нефроїда Фріда*** 
19.	$\rho = a\sin 3\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$. ***3-пелюсткова троянда*** 	20.	$\rho = a\cos 8\varphi$, де $0 \le \varphi \le 4\pi$ $a_1 = 5$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$. ***16-пелюсткова троянда*** 
21.	$\rho = a(1+\sin\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$. ***Кардіоїда*** 	22.	$\rho = a\sin(2/5\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 10\pi$ $a_1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$. ***Троянда*** 
23.	$\rho = a(1+2\sin(0.5\varphi))$, де $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$. ***Нефроїда Фріда*** 	24.	$\rho = a(1+\cos 2\varphi) + \sin^2 2\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 3$; $a_2 = 5$; $a_3 = 7$. ***"Квітка"*** 
25.	$\rho = b - a\sin\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 4, b_1 = 2$; $a_2 = 5, b_2 = 3$; $a_3 = 6, b_3 = 5$. ***Лімакона*** 	26.	$\rho = a\cos 4\varphi$, де $0 \le \varphi \le 4\pi$ $a_1 = 5$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$. ***8-пелюсткова троянда*** 
27.	$\rho = a\sin 2\varphi$, де $0 \le \varphi \le 2\pi$ $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$. ***4-пелюсткова троянда*** 	28.	$\rho = a\sin(1/4\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 10\pi$ $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$. ***Троянда*** 
29.	$\rho = 2a\sin\varphi$, де $0 \le \varphi \le \pi$ $a_1 = 4$; $a_2 = 6$; $a_3 = 8$. ***Коло*** 	30.	$\rho = a\sin(2/3\varphi)$, де $0 \le \varphi \le 10\pi$ $a_1 = 1$; $a_2 = 2$; $a_3 = 3$. ***Троянда*** 

Таблиця 3

№ вар	Рівняння	№ вар	Рівняння
1.	$x-\sin x=0.25$	2.	$\sin(0.4-x)-x^2=0$
3.	$x+\cos x-0.5=0$	4.	$\ln x+x^2-3=0$
5.	$3x-\cos x=1$	6.	$2x-e^x+3=0$
7.	$2-x-\ln x=0$	8.	$1.5x+\sin 3x=1.5$
9.	$\cos x-x+4=0$	10.	$x^3+\sin x=1$
11.	$2x-3\ln x-3=0$	12.	$\lg(x^2+2)=x+1$
13.	$\frac{1}{x}+x^2=0$	14.	$2+\sin^2 x=1+x^2$
15.	$1-3x=\sin x$	16.	$2\ln(1+x^2)-3+x=0$
17.	$2-x-e^x=0$	18.	$2+\sin^2 x=e^{-2x}$
19.	$2\lg x-\frac{x}{2}+1=0$	20.	$\cos(x+0.4)-x^2=0$
21.	$2x-\sin x=1.5$	22.	$\cos x-e^{2x}=0$
23.	$x^2-\sin 2x=0$	24.	$1-2x^2-\sin^2 x=0$
25.	$x+2=e^x$	26.	$1+xe^{-x}=x$
27.	$2\ln x-\frac{1}{x}=0$	28.	$-x+2e^{-2x}=0$
29.	$x^2-\sin x=1$	30.	$x+\cos x=0.5$

Таблиця 4

№ вар	СЛАР	№ вар	СЛАР
1.	$\begin{cases} 5x+8y-z=-7 \\ x+2y+3z=1 \\ 2x-3y+2z=9 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x+2y+4z=31 \\ 5x+y+2z=29 \\ 3x-y+z=10 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x+2y+z=4 \\ 3x-5y+3z=1 \\ 2x+7y-z=8 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 4x-3y+2z=9 \\ 2x+5y-3z=4 \\ 5x+6y-2z=18 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3x+2y+z=5 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x-y-z=4 \\ 3x+4y-2z=11 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x+y+2z=-1 \\ 2x-y+2z=-4 \\ 4x+y+4z=-2 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x+y+z=2 \\ 2x-y-6z=-1 \\ 3x-2y=8 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 3x-y=5 \\ -2x+y+z=0 \\ 2x-y+4z=15 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 2x+y-z=1 \\ x+y+z=6 \\ 3x-y+z=4 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 3x-y+z=4 \\ 2x-5y-3z=-17 \\ x+y-z=0 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=8 \\ 2y+7z=17 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x+5y+z=-7 \\ 2x-y-z=0 \\ x-2y-z=2 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2x-y+3z=7 \\ x+3y-2z=0 \\ 2y-z=2 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 2x+y+4z=20 \\ 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \end{cases}$
17.	$\begin{cases} 3x+4y+2z=8 \\ 2x-y-3z=-1 \\ x+5y+z=0 \end{cases}$	18.	$\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+3y+z=1 \\ 2x+y+3z=11 \end{cases}$
19.	$\begin{cases} x+5y-z=7 \\ 2x-y-z=4 \\ 3x-2y+4z=11 \end{cases}$	20.	$\begin{cases} 11x+3y-z=2 \\ 2x+5y-5z=0 \\ x+y+z=2 \end{cases}$

№ вар	СЛАР	№ вар	СЛАР
21.	$\begin{cases} 7x+5y+2z=18 \\ x-y-z=3 \\ x+y+2z=-2 \end{cases}$	22.	$\begin{cases} 2x+3y+z=1 \\ x+z=0 \\ x-y-z=2 \end{cases}$
23.	$\begin{cases} x-2y-2z=3 \\ x+y-2z=0 \\ x-y-z=1 \end{cases}$	24.	$\begin{cases} 3x+y-5z=-7 \\ 2x-3y+4z=-1 \\ 5x-y+3z=0 \end{cases}$
25.	$\begin{cases} x-2y+z=15 \\ 2x+y+3z=9 \\ 2x+3y+2z=-2 \end{cases}$	26.	$\begin{cases} 2x+y-z=6 \\ 3x-y+2z=5 \\ 4x+2y-5z=9 \end{cases}$
27.	$\begin{cases} 2x+y+3z=13 \\ x+y+z=6 \\ 3x+y+z=8 \end{cases}$	28.	$\begin{cases} x+2y+3z=3 \\ 3x+y+2z=7 \\ 2x+3y+z=3 \end{cases}$
29.	$\begin{cases} 6x+2y-z=2 \\ 4x-y+3z=-3 \\ 3x+2y-2z=3 \end{cases}$	30.	$\begin{cases} 2x+y+z=7 \\ x+2y+z=8 \\ x+y+2z=9 \end{cases}$

Рекомендована література

1. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. 2. Дифференциальное исчисление функций одной и многих независимых переменных. − Харьков: Изд-во при Харьковском государственном университете, 1973. − 368 с.

2. *Каплан И.А.* Практические занятия по высшей математике. Ч. 5. Численное решение алгебраических и трансцендентных уравнений, матричное исчисление, векторный анализ и интегрирование линенйных дифференциальных уравнений первого порядка с частными производными. – Издание второе, стереотипное. − Харьков: Изд-во при Харьковском государственном университете, 1972. − 412 с.

3. *Мудров А.Е.* Численные методы для ПЭВМ на языках БЕЙСИК, ФОРТРАН и ПАСКАЛЬ. − Томск, МП ″РАСКО″, 1991. – 272 с.

4. *Демидович Б.П.*, Марон И.А. Основы вычислительной математики. − М.: Наука, 1966. − 664 с.

5. Вибрані питання елементарної математики. Видання третє, перероблене і доповнене. – За ред. *А.В. Скорохода.* – Київ: Вища школа. Головне вид-во, 1982. – 456. – Ук.

6. *Дубовик В.П.,Юрик І.І.* Вища математика: Навч. посібник. – К.: − А.С.К., − 2001. – 648 с.: іл.

7. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* Линейная алгебра: Учебник для вузов. - 4-е изд. − М.: Наука. Физматлит, −1999. − 296 с.

8. *Михелеєв І.Л.* Індивідуальний комплект навчально-методичних матеріалів з дисципліни ″Вступ в обчислювальну математику″: Навчальний посібник. – Миколаїв: ІЗДО, НУК, − 2004. – 64 с.

Зміст