

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова

І. Л. МИХЕЛЄВ, С. О. СЛОБОДЯН

ОСНОВИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Навчальний посібник

Рекомендовано Міністерством освіти і науки України

Електронне видання
комбінованого використання на DVD-ROM



МИКОЛАЇВ ♦ НУК ♦ 2014

УДК 004.422:519.6(075.8)
ББК 73:22.18я73
М 69

Автори: І. Л. Михелєв, канд. техн. наук, доцент; С. О. Слободян, канд. техн. наук, доцент

Рецензенти:

А. Я. Казарєзов, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри економічної теорії та економетрії Чорноморського державного університету імені П. Могили;

І. І. Коваленко, доктор технічних наук, професор кафедри програмного забезпечення автоматизованих систем Національного університету кораблебудування імені адмірала Макарова

Електронний аналог друкованого видання:

*Рекомендовано Міністерством освіти і науки України
як навчальний посібник для студентів вищих навчальних закладів
(лист № 1/11–11792 від 22.07.2013)*

Михелєв І. Л.

М 69 Основи інформаційних технологій : навчальний посібник /
І. Л. Михелєв, С. О. Слободян. – Миколаїв : НУК, 2014. – 164 с.

ISBN 978–966–321–276–0

Посібник містить програму першої та другої частин курсу "Основи інформаційних технологій та програмування", основи теоретичного матеріалу, алгоритми реалізації базових обчислювальних процесів на ЕОМ, приклади розв'язання задач, алгоритми та приклади реалізації класичних чисельних методів.

Призначено для студентів, що вивчають курс "Основи інформаційних технологій та програмування".

УДК 004.422:519.6(075.8)
ББК 73:22.18я73

Навчальне видання

**МИХЕЛЄВ Ігор Леонідович
СЛОБОДЯН Сергій Олегович**

ОСНОВИ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Навчальний посібник

Комп'ютерне верстання *В. Г. Мазанко*
Коректор *М. О. Паненко*

© Михелєв І. Л., Слободян С. О., 2014

© Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова, 2014

ISBN 978–966–321–276–0

Формат 70×100/16. Ум. друк. арк. 10,3. Обсяг даних 3460 кб.
Тираж 10 прим. Вид. № 28. Зам. № 43.

Видавець і виготівник Національний університет кораблебудування
імені адмірала Макарова
просп. Героїв Сталінграда, 9, м. Миколаїв, 54025
E-mail : publishing@nuos.edu.ua

Свідоцтво суб'єкта видавничої справи ДК № 2506 від 25.05.2006 р.

ЧАСТИНА ДРУГА

ОСНОВИ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ

Інженерна практика в наші дні досить часто зустрічається з математичними задачами, точний (аналітичний) розв'язок яких дістати досить складно або зовсім неможливо. У цих випадках звертаються до наближених обчислень за допомогою чисельних методів.

Із появою ЕОМ, а в останні роки – персональних комп'ютерів, обчислювальні можливості математики суттєво зросли: задачі, в яких механічні обчислення займали багато часу, зараз розв'язуються за лічені хвилини або години.

Таким чином, знання основ обчислювальної математики та вміле використання ЕОМ значною мірою визначають кваліфікацію сучасного інженера, тому програмування та обчислювальна математика займають важливе місце у його загальноосвітній підготовці, а відповідні курси читаються в усіх університетах України.

Існує два принципово різних напрямки у методиці зазначеної підготовки: програмування та обчислювальна математика читаються як два окремі курси, або як один курс. У НУК основи програмування та обчислювальна математика вивчаються в рамках курсу "Основи інформаційних технологій та програмування", який читається студентам усіх технічних спеціальностей.

Дана частина навчального посібника присвячена другому розділу зазначеного курсу, але й може розглядатися окремо, оскільки алгоритми реалізації викладених чисельних методів наведено у вигляді структурно-логічних блок-схем, отже, безвідносно до конкретної операційної системи та мови програмування.

За своїм змістом друга частина посібника поділена на шість глав, присвячених чисельним методам математичного аналізу. Розглядаються мето-

ЧАСТИНА ДРУГА

ди чисельного інтегрування, методи розв'язання нелінійних рівнянь, метод розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь, інтерполяція та апроксимація функцій, а також методи наближеного розв'язання звичайних диференціальних рівнянь першого порядку.

Кожне основне математичне твердження підкріплено розв'язанням відповідного прикладу. Крім того, всі наведені алгоритми розв'язання різних задач на ЕОМ за допомогою чисельних методів ілюструються конкретними чисельними результатами, отриманими після програмної реалізації цих алгоритмів.

1. ЧИСЕЛЬНЕ ЗНАХОДЖЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ВИЗНАЧЕНОГО ІНТЕГРАЛУ. НАЙПРОСТІШІ КВАДРАТУРНІ ФОРМУЛИ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ НА ЕОМ

У багатьох наукових та технічних задачах інтегрування функції є складовою частиною вирішення певної проблеми. Обчислення площ та об'ємів, визначення статичних моментів і моментів інерції тіл, обчислення значення роботи, здійсненої деякими силами, та цілий ряд інших задач призводять до необхідності інтегрування функцій.

З курсу математичного аналізу відомо, якщо функція $f(x)$ неперервна на відрізку $[a, b]$, то визначений інтеграл від цієї функції існує та може бути обчислений за формулою Ньютона-Лейбніца:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a), \quad (1.1)$$

де $F(x)$ – первісна функції $f(x)$, тобто $F'(x) = f(x)$.

Слід зазначити, що формула (1.1) не отримала широкого практичного застосування, оскільки для більшості елементарних функцій $f(x)$ первісну $F(x)$ не вдається виразити через елементарні функції. Крім того, часто підінтегральна функція задається у вигляді таблиці або графіка. Ці обставини призводять до необхідності наближеного обчислення значення визначеного інтегралу з використанням певного чисельного методу.

Чисельне знаходження значення визначеного інтегралу базується на його

геометричній інтерпретації. Обчислення інтегралу $I = \int_a^b f(x) dx$ геометрично

ЧАСТИНА ДРУГА

зводиться до обчислення площі криволінійної трапеції $aABb$, обмеженої функцією $f(x)$, віссю абсцис та прямими $x = a$ та $x = b$ (рис. 1.1).

Формули наближеного інтегрування називаються *квадратурними формулами*. Розглянемо найпростіші з них.

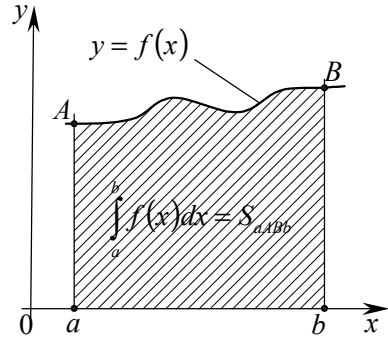


Рис. 1.1

1.1. Формули прямокутників

Розділимо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин. При цьому отримуємо послідовність точок (вузлів інтегрування) $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$. Відстань між сусідніми вузлами називається кроком інтегрування $h = \frac{b-a}{n}$. Таким чином, $x_i = a + ih, i = 0, 1, 2, \dots, n$.

Для обчислення інтегралу, площу криволінійної трапеції $aABb$ наближено замінюємо сумою площ елементарних прямокутників з висотами, які дорівнюють значенням підінтегральної функції у лівих кінцях часткових відрізків $[x_i, x_{i+1}]$ (рис. 1.2):

$$I = S_{aABb} = S_1 + S_2 + S_3 + \dots + S_{n-1} + S_n = hf(x_0 = a) + hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + \dots + hf(x_{n-2}) + hf(x_{n-1}).$$

Таким чином, остаточно маємо:

$$I = h \left[f(a) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (1.2)$$

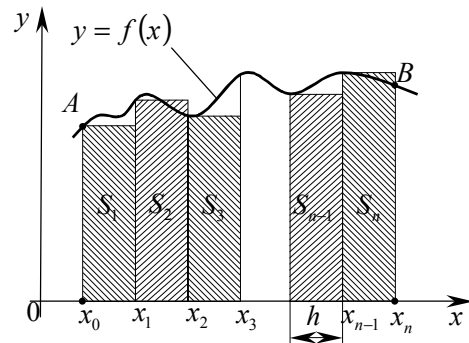


Рис. 1.2

Формула (1.2) має назву формули методу *лівих прямокутників*, а обчислення за нею легко можна реалізувати на ЕОМ згідно з алгоритмом, зображеним на рис. 1.3.

Аналогічно можна дістати формулу методу *правих прямокутників* для наближеного обчислення значення визначеного інтегралу (рис. 1.4):

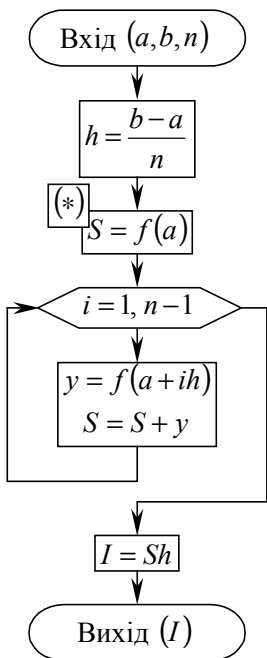


Рис. 1.3

$$I = S_{aAbb} = \sum_{i=1}^n S_i = hf(x_1) + hf(x_2) + hf(x_3) + \dots + hf(x_{n-1}) + hf(x_n = b).$$

$$I = h \left[f(b) + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (1.3)$$

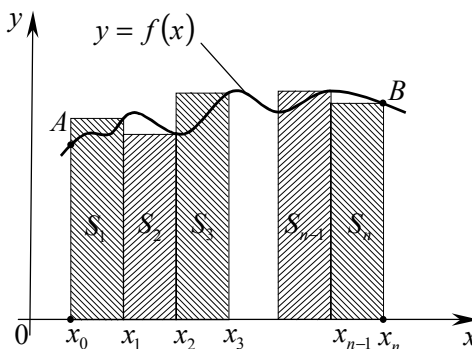


Рис. 1.4

Схема обчислення інтегралу за формулою (1.3) аналогічна наведеній на рис. 1.3 та відрізняється лише тим, що в обчислювальному блоці (*) необхідно записати $S = f(b)$.

З рис. 1.2 та 1.4 можна помітити: якщо інтервал h достатньо малий, а функція $y = f(x)$ у межах цього інтервалу достатньо гладка (строго кажучи, вона повинна бути диференційована на цьому інтервалі, тобто $f(x) \in C[x_i, x_{i+1}]$), то похибка R заміни цієї реальної функції прямою $y = \text{const}$ буде наближатися до нуля за умови, що $h \rightarrow 0$.

Приклад 1.1. За допомогою формул методів лівих та правих прямокутників обчислити $\int_2^{10} \frac{x^2 + 1}{x} dx$, покладаючи $n = 4$.

$$\int_2^{10} \frac{x^2 + 1}{x} dx, \text{ покладаючи } n = 4.$$

Розв'язання. Знаючи межі інтегрування $a = 2, b = 10$, знаходимо крок $h = \frac{b-a}{n} = 2$. Тоді вузлами інтегрування будуть точки $x_0 = a = 2, x_1 = 4,$

$x_2 = 6, x_3 = 8, x_4 = b = 10$, а значення підінтегральної функції $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

у цих точках дорівнюють: $f(x_0) = 2,5; f(x_1) = 4,25; f(x_2) = 6,167; f(x_3) = 8,125; f(x_4) = 10,1$.

Тепер знаходимо чисельне значення інтегралу, використовуючи формулу лівих прямокутників (1.2):

$$I = h \left[f(a) + \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right] = h[f(a) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] = \\ = 2[2,5 + 4,25 + 6,167 + 8,125] = 42,084.$$

Якщо обчислення визначеного інтегралу виконувати за формулою методу правих прямокутників (1.3), то дістанемо:

$$I = h \left[f(b) + \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right] = h[f(b) + f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)] = \\ = 2[10,1 + 4,25 + 6,167 + 8,125] = 57,284.$$

Даний інтеграл можна обчислити точно за формулою Ньютона–Лейбніца та визначити похибку наближеного інтегрування:

$$\int_2^{10} \frac{x^2 + 1}{x} dx = \int_2^{10} x dx + \int_2^{10} \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \Big|_2^{10} + \ln|x| \Big|_2^{10} = 49,609;$$

$$\delta = \left| \frac{I_{\text{точн.}} - I_{\text{наближ.}}}{I_{\text{точн.}}} \right| \cdot 100\%; \quad \delta_1 = \left| \frac{49,609 - 42,084}{49,609} \right| \cdot 100\% = 15,169\%;$$

$$\delta_2 = \left| \frac{49,609 - 57,284}{49,609} \right| \cdot 100\% = 15,471\%.$$

1.2. Формула трапецій

Наближене значення визначеного інтегралу можна знайти більш точно, якщо площу фігури $aABb$ обчислити як суму площ елементарних трапецій. Для цього у межах всіх відрізків $[x_p, x_{p+1}]$ дугу графіка підінтегральної функції $y = f(x)$ необхідно замінити хордою, що стягує цю дугу (рис. 1.5):

$$I = S_{aABb} = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{h}{2}[f(a) + f(x_1)] + \frac{h}{2}[f(x_1) + f(x_2)] +$$

$$+ \frac{h}{2}[f(x_2) + f(x_3)] + \dots + \frac{h}{2}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})] +$$

$$+ \frac{h}{2}[f(x_{n-1}) + f(b)] = \frac{h}{2}[f(a) + f(b) + 2f(x_1) + 2f(x_2) +$$

$$+ 2f(x_3) + \dots + 2f(x_{n-2}) + 2f(x_{n-1})].$$

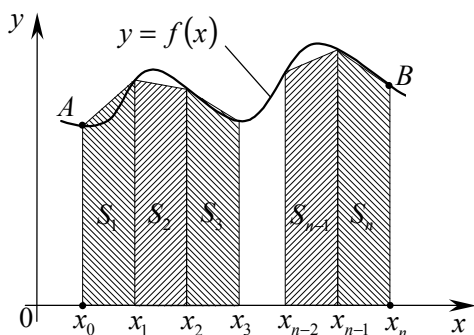


Рис. 1.5

Таким чином, остаточно маємо:

$$I = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \quad (1.4)$$

Формула (1.4) має назву формули методу *трапецій*. Наближені обчислення визначеного інтегралу за нею можуть бути реалізовані на ЕОМ згідно з алгоритмом, який наведено на

рис. 1.3, де в блоці (*) необхідно покласти $S = (f(a) + f(b))/2$.

У рамках методу трапецій, аналогічно методам прямокутників, похибка заміни функції $y = f(x)$ прямою $y = ax + b$ буде наближатися до нуля, якщо $h \rightarrow 0$. Оцінка похибки R для одиничного кроку методу трапецій сформульована у вигляді наступної теореми, що представлена тут без доведення.

Нехай $f(x) \in C^2[x_i, x_{i+1}]$. Тоді похибка квадратурної формули трапеції має вигляд:

$$R(h, f) = -\frac{h^3}{12} f''(\xi),$$

де ξ – деяка точка з інтервалу $[x_i, x_{i+1}]$.

При поширенні цієї оцінки на весь відрізок інтегрування $[a, b]$, тобто на всі часткові відрізки $[x_i, x_{i+1}]$, кількість яких дорівнює n , отримуємо

$$R_n(h, f) = -\frac{h^3 n}{12} f''(\xi), \quad x \in [a, b].$$

З огляду на те, що $hn = b - a$, дістанемо остаточно вигляд формули для оцінки похибки інтегрування в рамках даного методу:

$$|R_n(h, f)| \leq M \frac{h^2 |b-a|}{12}, \quad (1.5)$$

де $M = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$.

Із оцінки (1.5) випливає, що квадратурна формула трапецій виявляється точною для поліномів першого степеня $f(x) = ax + b$, оскільки для них похідна другого порядку $f''(x)$ дорівнює нулю.

Приклад 1.2. За допомогою формули методу трапецій обчислити інтеграл прикладу 1.1, покладаючи $n = 4$. Оцінити точність отриманого значення.

Розв'язання. За допомогою формули (1.5) спочатку дамо оцінку похибки методу. Для цього обчислимо другу похідну підінтегральної функції:

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$. На відрізку інтегрування $[2, 10]$ функція $f''(x)$ всюди додатна, причому її значення обмежене зверху: $f''(x) < 0,25$. Таким чином, маємо:

$$|R_n(h, f)| \leq 0,25 \frac{2^2 \cdot 8}{12} = 0,667.$$

Значення підінтегральної функції у вузлових точках обчислені у прикладі 1.1 та представлені у вигляді таблиці:

i	0	1	2	3	4
x_i	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	2,5	4,25	$6\frac{1}{6}$	8,125	10,1

Таким чином, маємо:

$$I = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^3 f(x_i) \right] = 2 \left[\frac{12,6}{2} + 4,25 + 6,167 + 8,125 \right] = 49,684.$$

В кінцевому результаті маємо $I = 49,684 \pm 0,667$.

Слід звернути увагу на те, що формула (1.5) дає тільки верхню оцінку похибки, а так як функція $f''(x) = \frac{2}{x^3}$ швидко спадає, то модуль реальної

похибки повинен бути значно меншим. Насправді: $\Delta = |49,609 - 49,684| = 0,075 < 0,667$.

1.3. Узагальнений алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу методами лівих прямокутників, правих прямокутників та трапецій

Оскільки формули (1.2)–(1.4) однакові з точністю до значення першого доданка у дужках (для метода лівих прямокутників він дорівнює $f(a)$, для метода правих прямокутників – $f(b)$, а для метода трапецій – $\frac{f(a) + f(b)}{2}$), можна запропонувати узагальнений алгоритм чисельного знаходження визначеного інтегралу, якщо

виділити алгоритм обчислення суми $\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$,

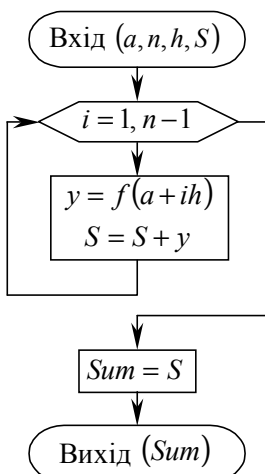


Рис. 1.6

(він є загальним для всіх трьох методів) як самостійний. Назвемо зазначений алгоритм *Sum*, а його блок-схему зобразимо на рис. 1.6.

Вибір того чи іншого чисельного метода повинен визначати сам користувач, наприклад так, як це показано на рис. 1.7.

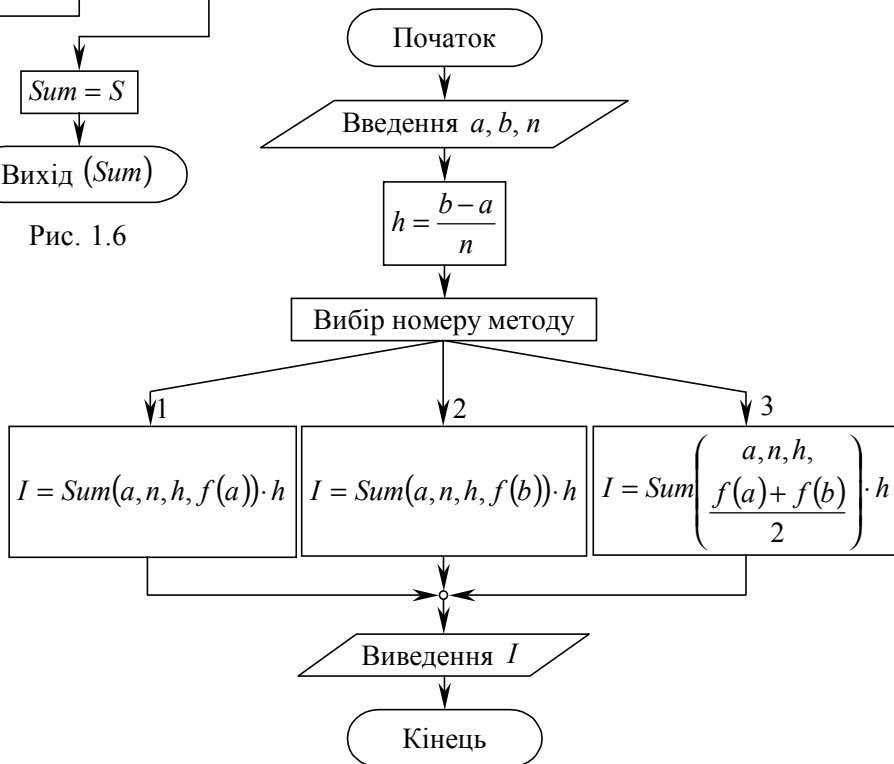


Рис. 1.7

Принцип побудови узагальненого алгоритму базується на наступному. Якщо на вхід алгоритму *Sum* замість формального параметра S подається фактичний параметр $f(a)$, то реалізується метод лівих прямокутників. Якщо замість S підставити $f(b)$, то визначений інтеграл обчислюється у рамках методу правих прямокутників. При підстановці як фактичного параметра значення $\frac{f(a) + f(b)}{2}$ інтеграл буде обчислений методом трапецій.

1.4 Формула Сімпсона

Точність наближеного інтегрування помітно зросте, якщо при обчисленні елементарних площ S_i , на які розбивається площа трапеції $aABb$, підінтегральну функцію $y = f(x)$ замінити параболою другого степеня вигляду $y = ax^2 + bx + c$, значення якої у вузлах x_i співпадають зі значеннями початкової підінтегральної функції, тобто $f(x_i) = ax_i^2 + bx_i + c$. Оскільки параболу можна провести, як мінімум, по трьох точках (рис. 1.8), то відрізок $[a, b]$ необхідно розбити на парне число частин ($2n$).

Розглянемо довільну параболічну трапецію, зображену на рис. 1.9. Її площа

$$S = \int_{-h}^h (ax^2 + bx + c) dx = \frac{2}{3}ah^3 + 2ch.$$

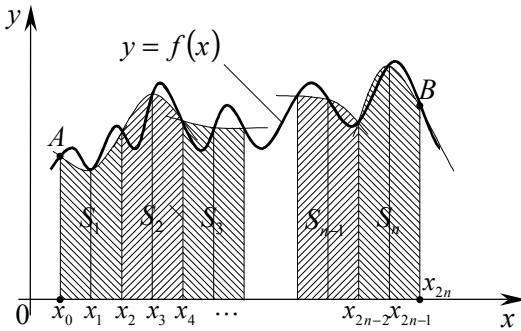


Рис. 1.8

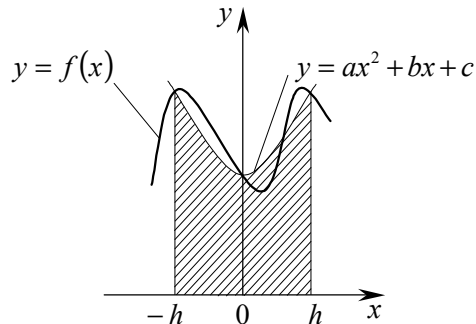


Рис. 1.9

Для знаходження невідомих коефіцієнтів a та c , які входять у формулу для обчислення S , скористаємося обставиною, що у вузлах $-h, 0$ та h значення параболу $y = ax^2 + bx + c$ та підінтегральної функції $y = f(x)$ співпадають:

$$\left. \begin{aligned} f(-h) &= ah^2 - bh + c \\ f(0) &= c \\ f(h) &= ah^2 + bh + c \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = f(0); a = \frac{f(-h) - 2f(0) + f(h)}{2h^2}.$$

Таким чином, площа параболічної трапеції визначається формулою

$$S = \frac{h}{3} [f(-h) + 4f(0) + f(h)].$$

За допомогою отриманої формули можна обчислити всі елементарні площі S_i (див. рис. 1.8), а потім взяти їх суму для знаходження S_{aABb} :

$$I = S_{aABb} = \sum_{i=1}^n S_i = \frac{h}{3} \left(\begin{aligned} & f(a) + 4f(x_1) + f(x_2) + f(x_2) + 4f(x_3) + f(x_4) + f(x_4) + \\ & + 4f(x_5) + f(x_6) + \dots + f(x_{2n-4}) + 4f(x_{2n-3}) + \\ & + f(x_{2n-2}) + f(x_{2n-2}) + 4f(x_{2n-1}) + f(b) \end{aligned} \right)$$

Остаточно отримаємо:

$$I = \frac{h}{3} \left(\begin{aligned} & f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3) + f(x_5) + \dots + f(x_{2n-3}) + \\ & + f(x_{2n-1})] + 2[f(x_2) + f(x_4) + f(x_6) + \dots + \\ & + f(x_{2n-4}) + f(x_{2n-2})] \end{aligned} \right)$$

або

$$I = \frac{h}{3} \left(f(a) + f(b) + 4 \sum_{i=1,3,5 \dots}^{2n-1} f(x_i) + 2 \sum_{i=2,4,6 \dots}^{2n-2} f(x_i) \right), \quad (1.6)$$

де $h = \frac{b-a}{2n}$.

Формула (1.6) має назву формули *Сімпсона* або формули *парабол*. Алгоритм її практичної реалізації на ЕОМ наведений на блок-схемі, яка зображена на рис. 1.10.

Як видно, використання допоміжного параметра k дозволило нам обійтися одним циклом для підсумовування значень $f(x_i)$ з різними коефіцієнтами. Для кожної ітерації циклу з параметром i , значення $k = (-1)^{i+1}$, $i = 1, 2, 3, \dots, 2n - 1$. Отже, коефіцієнт $(3 + k)$ дорівнює 4 для $i = 1, 3, 5, \dots, 2n - 1$, а для $i = 2, 4, 6, \dots, 2n - 2$ цей коефіцієнт дорівнює 2.

Далі представимо без доведення теорему про оцінку похибки R для одного кроку методу Сімпсона.

Нехай $f(x) \in C^4[x_i, x_{i+2}]$. Тоді похибка квадратурної формули Сімпсона має вигляд:

$$R(h, f) = -\frac{h^5}{90} f^{(IV)}(\xi),$$

де ξ – деяка точка з інтервалу $[x_i, x_{i+2}]$.

Аналогічно тому, як це було зроблено в підрозд. 1.2, поширимо дану оцінку на всі часткові відрізки $[x_i, x_{i+2}]$ і внаслідок цього отримуємо формулу для оцінки похибки знаходження визначеного інтегралу:

$$|R_n(h, f)| \leq M \frac{h^4 |b-a|}{180}, \quad (1.7)$$

де $M = \max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)|$.

З (1.7) випливає, що визначений інтеграл, обчислений за квадратурною формулою Сімпсона, буде точними, якщо підінтегральна функція є поліномом не вище третього степеня.

Приклад 1.3. Обчислити методом Сімпсона інтеграл прикладу 1.1, покладаючи $n = 2$. Оцінити точність отриманого значення.

Розв'язання. Обчислимо $h = \frac{b-a}{2n} = 2$ та за до-

помогою формули (1.7) оцінимо похибку методу. На відрізку $[2, 10]$ функція $f^{(IV)}(x)$ всюди додатна, а її значення обмежено зверху: $f^{(IV)}(x) < 0,75$. Таким

чином, $|R_n(h, f)| \leq 0,75 \frac{2^4 \cdot 8}{180} = \frac{8}{15}$.

Значення підінтегральної функції у вузлових точках обчислені в прикладі 1.1, отже за формулою (1.6) маємо:

$$\begin{aligned} I &= \frac{h}{3} (f(a) + f(b) + 4[f(x_1) + f(x_3)] + 2f(x_2)) = \\ &= \frac{2}{3} \left(2,5 + 10,1 + 4[4,25 + 8,125] + \frac{37}{3} \right) = 49,622. \end{aligned}$$

$$I = 49,622 \pm \frac{8}{15}; \quad \Delta = |49,609 - 49,622| = 0,013 < \frac{8}{15}.$$

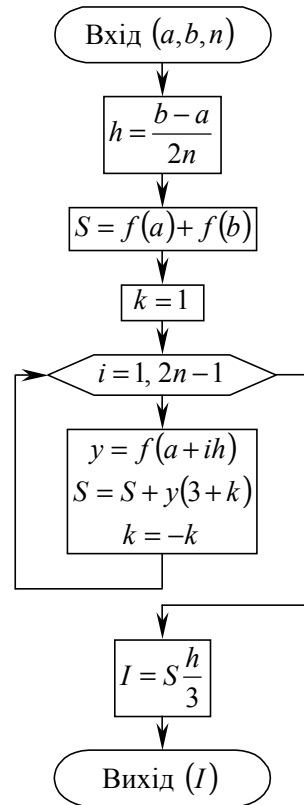


Рис. 1.10

1.5. Обчислення інтегралу з заданим ступенем точності. Метод подвійного перерахунку

Іноді доводиться розв'язувати задачі чисельного обчислення значення визначеного інтегралу з заданим наперед ступенем точності ϵ . Для цього необхідно прогнозувати необхідну кількість n елементарних площ S_i , які складають загальну площу криволінійної трапеції S_{aABb} .

Нехай задана гранична припустима похибка чисельного інтегрування ϵ . Для того щоб виконувалася нерівність $|R_n(h, f)| \leq \epsilon$, достатньо поставити вимогу:

$M \frac{h^2 |b-a|}{12} \leq \epsilon$, враховуючи оцінку (1.5) для методу трапецій, або

$M \frac{h^4 |b-a|}{180} \leq \epsilon$, враховуючи (1.7) для методу Сімпсона. Отже, для методу трапецій

$$n \geq \sqrt{\frac{\max_{x \in [a, b]} |f''(x)| \cdot |b-a|^3}{12\epsilon}}, \quad (1.8)$$

а для методу Сімпсона

$$n \geq \sqrt[4]{\frac{\max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)| \cdot |b-a|^5}{2880\epsilon}}. \quad (1.9)$$

Приклад 1.4. Методами трапецій та Сімпсона обчислити інтеграл

$$\int_0^1 x^2 \sin x \, dx \text{ з заданим ступенем точності } \epsilon = 10^{-2}.$$

Розв'язання.

1. Згідно з методом трапецій, необхідне число елементарних площ n визначається за формулою (1.8):

$$\max_{x \in [a, b]} |f''(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |(2-x^2) \sin x + 4x \cos x| = 3,003;$$

$$n \geq \sqrt{\frac{3,003 \cdot 1^3}{12 \cdot 10^{-2}}} \Rightarrow n \geq 5,002.$$

Тепер можна визначити необхідний крок $h = \frac{1}{5,002} = 0,200$.

Вузли інтегрування і значення підінтегральної функції у вузлових точках обчислимо у вигляді наступної таблиці:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_i)$	0	0,008	0,062	0,203	0,459	0,841

По даним таблиці знаходимо чисельне значення інтегралу за формулою (1.4):

$$I = h \left[\frac{f(a) + f(b)}{2} + \sum_{i=1}^4 f(x_i) \right] =$$

$$= 0,2 \left[\frac{0,841}{2} + 0,008 + 0,062 + 0,203 + 0,459 \right] = 0,231.$$

Остаточно дістанемо: $I = 0,23 \pm 0,01$.

2. Згідно з методом Сімпсона, число n визначається за формулою (1.9), а значення визначеного інтегралу – за формулою (1.6):

$$\max_{x \in [a, b]} |f^{(IV)}(x)| = \max_{x \in [0, 1]} |(x^2 - 12) \sin x - 8x \cos x| = 13,579;$$

$$n \geq 4 \sqrt{\frac{13,579 \cdot 1^5}{2880 \cdot 10^{-2}}} \Rightarrow n \geq 0,829.$$

$h \leq \frac{1}{2 \cdot 0,829} \leq 0,603$. Приймаємо $h = 0,5$.

i	0	1	2
x_i	0	0,5	1
$f(x_i)$	0	0,120	0,841

$$I = \frac{h}{3} [f(a) + 4f(x_1) + f(b)] = \frac{0,5}{3} [0 + 4 \cdot 0,120 + 0,841] = 0,220.$$

Остаточно дістанемо: $I = 0,22 \pm 0,01$.

Невелике розходження у значенні I , яке обчислено у прикладі 1.4 різними методами, виникло через те, що в рамках методу трапецій не було потреби округляти крок h , а в рамках методу Сімпсона значення h довелося округлити так, щоб число кроків стало цілим. Таким чином, при реалізації чисельного методу інтегрування з заданим наперед ступенем точності на ЕОМ вибір

відповідного кроку являє собою окрему нескладну задачу. Крім того, формули (1.8) та (1.9) дозволяють прогнозувати похибку відповідного методу інтегрування тільки у тих випадках, коли підінтегральну функцію задано аналітично.

Виходячи з цих обставин, на практиці доцільним буде застосовувати метод *подвійного перерахунку*, згідно з яким шуканий інтеграл обчислюють двічі: при поділі відрізка інтегрування на n частин (I_n) та на $2n$ частин (I_{2n}).

Для оцінки похибки методу трапецій можна використовувати просту формулу. Нехай $R_n^n(h, f)$ та $R_n^{2n}(h, f)$ – похибки інтегрування за формулою трапецій відповідно при n та $2n$ відрізках поділу. Враховуючи оцінку (1.5),

можна скласти рівність $\frac{R_n^n}{R_n^{2n}} = \left(\frac{h_n}{h_{2n}} \right)^2$, де h_n та h_{2n} – кроки інтегрування

в першому та другому випадках. Зрозуміло, що $(h_n/h_{2n})^2 = 4$, тоді $R_n^n = 4R_n^{2n}$. Якщо I – істинне значення визначеного інтегралу, то $I = I_n + R_n^n$ та $I = I_{2n} + R_n^{2n}$, звідки випливає, що $|I_n - I_{2n}| = 3|R_n^{2n}|$. Таким чином, якщо задана гранична припустима похибка інтегрування ϵ , то достатньо, щоб $|R_n^{2n}| \leq \epsilon$, отже,

$$|I_n - I_{2n}| \leq 3\epsilon. \tag{1.10}$$

Аналогічні міркування дають можливість оцінити похибку методу Сімпсона згідно з методом подвійного перерахунку за формулою

$$|I_n - I_{2n}| \leq 15\epsilon. \tag{1.11}$$

На рис. 1.11 показана принципова схема алгоритму чисельного інтегрування з заданим ступенем точності. Після реалізації на ЕОМ вказаної схеми для методів трапецій та Сімпсона були отримані наступні результати обчислення інтегралу $\int_0^1 x^2 \sin x dx$ з точністю $\epsilon = 10^{-5}$:

Метод трапецій:		Метод Сімпсона:	
$n = 2$	$I = 0,27030;$	$n = 2$	$I = 0,22306;$
$n = 4$	$I = 0,23487;$	$n = 4$	$I = 0,22323;$
$n = 8$	$I = 0,22614;$	$n = 8$	$I = 0,22324.$
$n = 16$	$I = 0,22397;$		
$n = 32$	$I = 0,22343;$		
$n = 64$	$I = 0,22329;$		
$n = 128$	$I = 0,22326;$		
$n = 256$	$I = 0,22325.$		

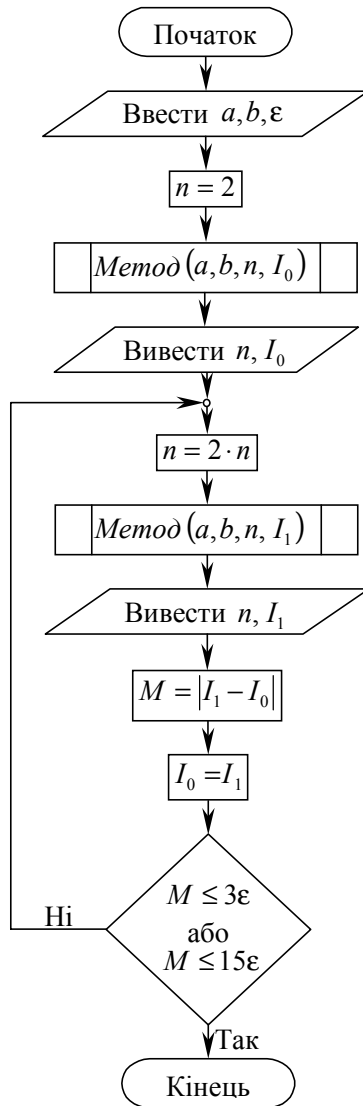


Рис 1.11

Бачимо, що зі збільшенням n похибка інтегрування зменшується (особливо швидко за методом Сімпсона). Але це твердження має суто теоретичне значення, так як у процесі практичних обчислень методом подвійного перерахунку, починає сильно прогресувати питома вага похибки округлення, значення якої з деякого моменту стає порівнянним з точністю результату інтегрування.

2. ЧИСЕЛЬНІ МЕТОДИ РОЗВ'ЯЗАННЯ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ОДНІЄЮ ЗМІННОЮ ТА ЇХ РЕАЛІЗАЦІЯ НА ЕОМ

2.1. Лінійні алгебраїчні, нелінійні алгебраїчні та трансцендентні рівняння. Необхідність наближеного розв'язання таких рівнянь

Відомо, що існують *лінійні* та *нелінійні* функції однієї змінної.

Найважливішою властивістю лінійних функцій $y = F(x)$ є те, що вони задовольняють принципу *суперпозиції*. Цей принцип полягає в наступному: якщо аргумент x являє собою лінійну суперпозицію точок $x = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n$ (де c_i – константи), то значення y також може бути зображене у вигляді лінійної суперпозиції значень $F(x_1), F(x_2), F(x_3), \dots, F(x_n)$. Наприклад, подана лінійна функція

$y = 2x$. Якщо $x = 2x + 0,5x + 0,7x = 3,2x$, то лінійна суперпозиція дозволяє записати рівність $y = 4x + x + 1,4x = 6,4x$.

Нелінійні функції $y = F(x)$ не задовольняють принципу суперпозиції, наприклад, для $y = x^2 - (c_1x + c_2x)^2 \neq c_1x^2 + c_2x^2$.

Лінійне або нелінійне рівняння з однією змінною в загальному вигляді можна записати так:

$$F(x) = 0, \quad (2.1)$$

де функція $F(x)$ визначена і неперервна на скінченному або нескінченному інтервалі (A, B) .

Таким чином, рівняння (2.1) називається *лінійним*, якщо $F(x)$ – лінійна функція. Якщо $F(x)$ – нелінійна функція, то рівняння (2.1) є *нелінійним*.

Коренем або *розв'язком* рівняння (2.1) називається будь-яке число $x_0 \in (A, B)$, що перетворює функцію $F(x)$ на нуль, тобто $F(x) = 0$.

Число x_0 називається *коренем k -ї кратності*, якщо при $x = x_0$ разом із функцією $F(x)$ перетворюються на нуль її похідні до $(k - 1)$ -го порядку включно:

$$F(x_0) = F'(x_0) = F''(x_0) = \dots = F^{(k-1)}(x_0) = 0.$$

Однократний корінь називається *простим*.

Два рівняння $F(x) = 0$ і $G(x) = 0$ називаються *рівносильними (еквівалентними)*, якщо будь-який розв'язок кожного з них є розв'язком і для іншого, тобто множини розв'язків цих рівнянь співпадають.

Розглянемо загальний вигляд лінійного рівняння з однією змінною: $kx + b = 0$. Воно має єдиний розв'язок $x = -b/k$.

Для нелінійних рівнянь можливі наступні варіанти розв'язків:

1. єдиний розв'язок, наприклад $5x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$;
2. нескінченна множина розв'язків, наприклад $\sin x - 1 = 0 \Rightarrow x = 0,5\pi + 2\pi k$, де k належить множині цілих чисел ($k \in \mathbb{Z}$);
3. немає розв'язків, наприклад $\sin x - 1,2 = 0$;
4. декілька $n \geq 2$ розв'язків, наприклад $x^2 - 4 = 0 \Rightarrow x_1 = 2, x_2 = -2$.

Нелінійні рівняння з одним невідомим підрозділяються на *алгебраїчні* та *трансцендентні*.

Нелінійне рівняння (2.1) називається алгебраїчним, якщо функція $F(x)$ є алгебраїчною. Шляхом алгебраїчних перетворень із будь-якого алгебраїчного рівняння можна дістати рівняння в канонічній формі:

$$F(x) = P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_n = 0,$$

де $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ – коефіцієнти рівняння, а x – змінна.

Показник n називається *степенем* алгебраїчного рівняння.

Відзначимо, що алгебраїчна функція $F(x)$ може бути:

1. *раціональною*:

а) *ціло-раціональною*, наприклад $F(x) = \frac{2x^2}{3} + \frac{x-1}{2}$;

б) *дрібно-раціональною*, наприклад $F(x) = \frac{x-2}{x^3+1} - \frac{1}{x} + 1$;

2. *ірраціональною*, наприклад $F(x) = \frac{3x^4 - 2x - \sqrt[5]{x+2}}{x^3 + \sqrt{x+1}}$.

Відомо, що будь-яке нелінійне алгебраїчне рівняння має, принаймні, один корінь – дійсний або комплексний. При цьому виявляється, що дістати точні значення коренів можна лише в окремих випадках, зазвичай коли для цього є деяка проста формула.

Так, для обчислення коренів квадратного рівняння вигляду $ax^2 + bx + c = 0$ застосовується відома формула $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Для розв'язання кубічного рівняння вигляду $x^3 + px + q = 0$ застосовується формула $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$. Відразу відмітимо, що практичне застосування цієї формули ускладнено необхідністю використання апарата комплексних чисел.

Для розв'язання рівняння четвертого степеня також існує формула, яка виражає значення коренів через коефіцієнти цього рівняння. Однак вона є настільки складною, що практично не застосовується.

Слід зазначити, що в 1824 р. норвезький математик Абель довів, що рівняння п'ятого степеня $x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e = 0$ не можна розв'язати алгебраїчно. Іншими словами, не можна виразити корені цього рівняння через величини a, b, c, d, e за допомогою шести алгебраїчних дій (додавання, віднімання, множення, ділення, піднесення до степеня, добування кореня). У 1830 р. французький математик Галуа довів, що ніяке загальне рівняння, степінь якого більше за 4, не можна розв'язати алгебраїчно.

Виходячи з вищесказаного, можна зробити висновок, що більшість нелінійних алгебраїчних рівнянь точно розв'язати неможливо, внаслідок цього для обчислення коренів таких рівнянь доводиться застосовувати наближені (чисельні) методи.

Рівняння (2.1) називається *трансцендентним*, якщо функція $F(x)$ не алгебраїчна. Прикладами трансцендентних рівнянь є $x - 10\sin x = 0$; $2^x - 2\cos x = 0$; $\lg(x + 5) = x^2$ і т. п.

У деяких випадках розв'язання трансцендентних рівнянь можна звести до розв'язання алгебраїчних рівнянь. Але все-таки переважна більшість нелінійних трансцендентних рівнянь із однією змінною не розв'язуються за допомогою алгебраїчних перетворень (точними методами) і на практиці їх розв'язують чисельними методами.

У даному розділі представлені чисельні методи розв'язання нелінійних рівнянь із однією змінною, що є одними з найважливіших серед методів прикладного аналізу, необхідність у використанні яких виникає у багатьох розділах фізики, механіки, техніки та інших областях.

Розв'язати нелінійне рівняння чисельно – це означає *встановити, чи має воно корені, скільки їх, а також дістати значення коренів із заданим*

ступенем точності. Задача чисельного визначення дійсних коренів рівняння (2.1) зазвичай складається з двох етапів:

1. *Відокремлення коренів* (або *визначення відрізків ізоляції коренів*), тобто знаходження достатньо малих відрізків $[a, b]$ розглядуваної області (A, B) , у межах яких знаходиться одне значення кореня.

2. *Уточнення коренів*, тобто їх обчислення із заданим ступенем точності у межах відрізків $[a, b]$ відповідним чисельним методом.

2.2. Відокремлення коренів нелінійного рівняння. Реалізація процесу відокремлення на ЕОМ

Перший етап чисельного розв'язання рівняння (2.1) полягає у *відокремленні коренів*, тобто у встановленні відрізків, які містять тільки один корінь. Відокремлення коренів у багатьох випадках можна виконати графічно. Оскільки дійсні корені рівняння (2.1) – це точки перетинання графіка функції $F(x)$ з віссю абсцис, достатньо побудувати графік $F(x)$ і позначити на цій осі відрізки, що містять по одному кореню.

Побудову графіків у деяких випадках можна значно спростити, якщо замінити рівняння (2.1) на рівносильне: $F_1(x) = F_2(x)$. У цьому випадку будуються графіки функцій $y = F_1(x)$ та $y = F_2(x)$, а потім на осі Ox відмічаються відрізки, що локалізують абсциси точок перетинання цих графіків.

Приклад 2.1. Здійснити *графічне відокремлення коренів* рівняння $\sin 2x - \ln x = 0$ на відрізку $[0; 3]$.

Розв'язання. Побудуємо окремо графіки функцій $y = \sin 2x$ і $y = \ln x$ (рис. 2.1). Абсцисою точки A (точки їх перетинання) є корінь x_0 розглянутого рівняння, отже, $x_0 \in [1; 0,5\pi]$.

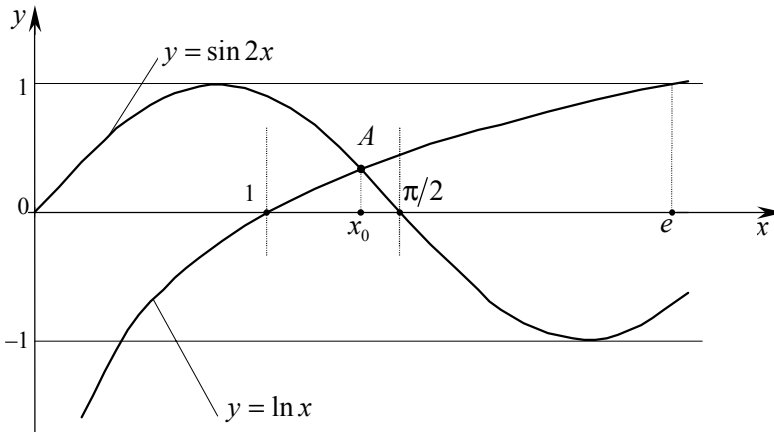


Рис. 2.1

У випадку, коли результати графічного відокремлення коренів викликають сумнів або графічне відокремлення здійснити важко, застосовується так зване *обчислювальне відокремлення кореня*.

При обчислювальному відокремленні кореня використовуються наступні математичні твердження:

1. Якщо неперервна на відрізку $[a, b]$ функція $F(x)$ приймає на його кінцях значення різних знаків (тобто $F(a) \cdot F(b) < 0$), то рівняння (2.1) має на цьому відрізку щонайменш один корінь.

2. Якщо функція $F(x)$ до того ж ще строго монотонна (тобто $F'(x)$ у межах $[a, b]$ зберігає свій знак), то корінь на відрізку $[a, b]$ буде єдиним.

Справді, значення функції $F(x) = \sin 2x - \ln x$ із прикладу 2.1 на відрізку $[1,2; 1,6]$: $F(1,2) > 0$; $F(1,6) < 0$. Крім цього, $F'(x \in [1,2; 1,6]) = 2 \cos 2x - \frac{1}{x} < 0$.

При відокремленні коренів можна ефективно використовувати ЕОМ. Для

цього необхідно протабулювати $F(x)$ на $[A, B]$ з деяким кроком h і з урахуванням твердження 1, вказати всі відрізки $[a, b] \subset [A, B]$, які містять по одному кореню. На рис. 2.2 наведена принципова схема алгоритму описаного табулювання, у якому функція $F(x)$ повинна використовуватися з урахуванням її області визначення D .

Очевидно, що надійність такого підходу до відокремлення коренів залежить від характеру функції $F(x)$ і величини кроку h (чим менше крок, тим вище ймовірність того, що неперервна функція $F(x)$ на малому інтервалі ізоляції кореня $[a, b]$ буде монотонна).

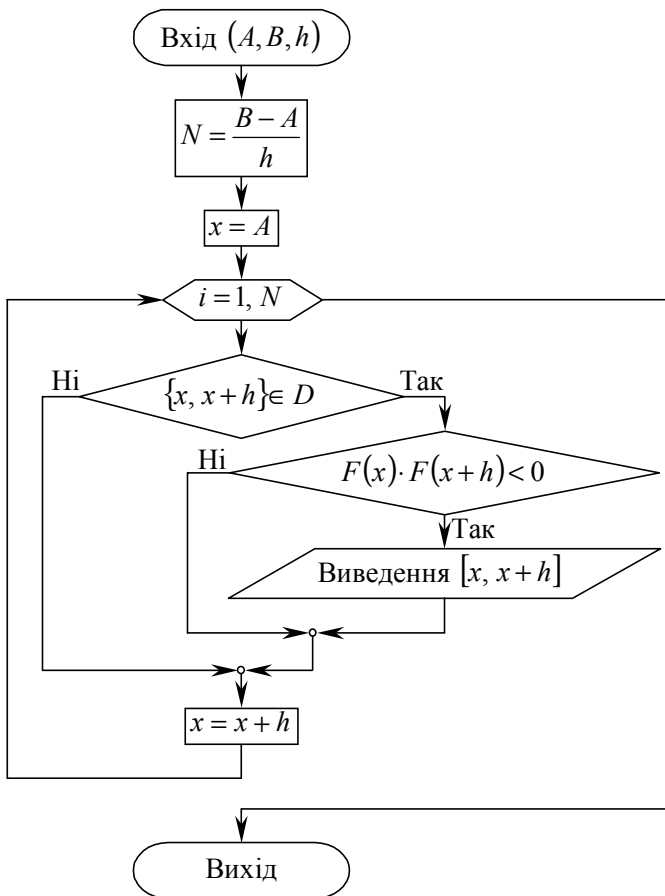


Рис. 2.2

Після реалізації даної схеми на ЕОМ для функції $F(x) = x^3 - \cos \pi x$ при $A = -1000, B = 1000, h = 0,2$ були отримані наступні результати:

$$x_0^1 \in [-1,2; -1]; \quad x_0^2 \in [-0,6; -0,4]; \quad x_0^3 \in [0,4; 0,6].$$

2.3. Метод половинного ділення і його реалізація на ЕОМ

Даний метод відомий у літературі ще й під назвами *метод дихотомії, різновид методу проб і метод бісекції*.

Отже, нехай нелінійне рівняння (2.1) має на відрізку ізоляції кореня $[a, b]$ єдиний корінь, причому функція $F(x)$ на цьому відрізку неперервна. Розділимо відрізок $[a, b]$ навпіл точкою $c = (a + b)/2$. Якщо $F(c) \neq 0$ (що практично ймовірніше), то можливі два випадки: або $F(x)$ змінює знак на відрізку $[a, c]$ (рис. 2.3,а), або на відрізку $[c, b]$ (рис. 2.3,б). Обираючи в кожному випадку той із відрізків, на якому функція змінює знак, і продовжуючи процес половинного ділення далі, можна дійти до якзавгодно малого відрізка, який містить корінь рівняння.

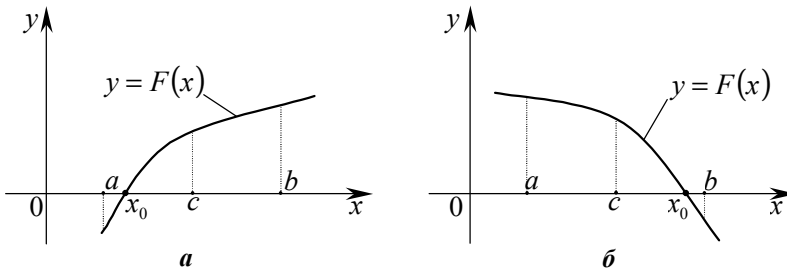


Рис. 2.3

Для реалізації описаного алгоритму локалізації кореня методом половинного ділення зручно (і доцільно) користуватися тільки початковими позначеннями (a, b, c) . Графічна інтерпретація алгоритму з використанням початкових позначень проілюстрована на рис. 2.4.

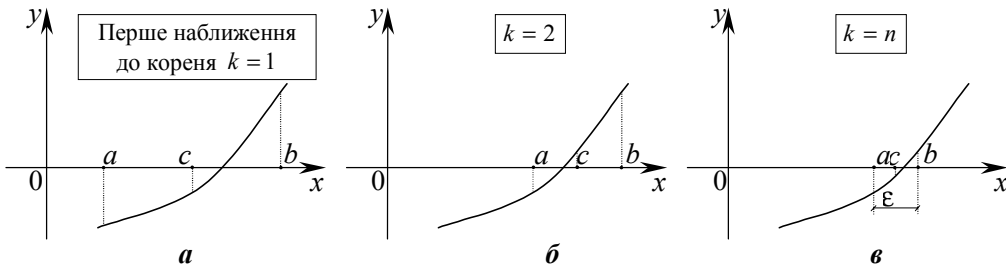


Рис. 2.4

З рис. 2.4 видно, що метод половинного ділення можна використовувати як метод розв'язання нелінійного рівняння із заданим ступенем точності ϵ .

Дійсно, якщо на деякому етапі процесу половинного ділення отриманий відрізок $[a, b]$ довжини ϵ , що містить корінь (див. рис. 2.4, в), то, прийнявши наближено $x_0 = (a + b)/2 = c$, дістанемо похибку, яка не перевищує значення $\epsilon/2$. Отже, процес половинного ділення для обчислення кореня з точністю ϵ необхідно продовжувати до того часу, поки не виконається умова $(b - a)/2 < \epsilon$.

Приклад 2.2. Методом половинного ділення уточнити корінь рівняння $\sin 2x - \ln x = 0$ на відокремленому відрізку $[1; 1,6]$ з точністю $\epsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Ручні обчислення у рамках методу половинного ділення зручно організувати у вигляді наступної таблиці:

k	a	b	c	$\epsilon = (b - a)/2$	$F(a)$	$F(c)$	$F(a) \cdot F(c)$
1	1,000	1,600	1,300		0,909	0,253	$> 0 \Rightarrow a = c$
2	1,300	1,600	1,450	0,150	0,253	-0,132	$< 0 \Rightarrow b = c$
3	1,300	1,450	1,375	0,075	0,253	0,063	$> 0 \Rightarrow a = c$
4	1,375	1,450	1,413	0,038	0,063	-0,035	$< 0 \Rightarrow b = c$
5	1,375	1,413	1,394	0,019	0,063	0,014	$> 0 \Rightarrow a = c$
6	1,394	1,413	1,403	0,009 $<$ 0,01			

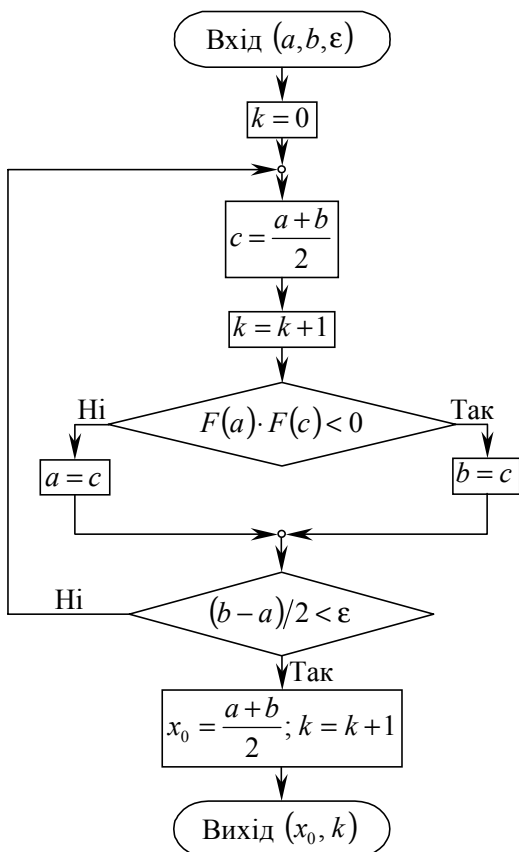


Рис. 2.5

Таким чином, $x_0 = 1,40 \pm 0,01$, а $|F(1,40)| = 0,00$.

Приклад 2.2 показує, що для обчислення кореня нелінійного рівняння навіть із невеликою точністю, у рамках методу половинного ділення доводиться виконувати досить багато рутинних обчислень. Отже, алгоритм даного методу доцільно реалізувати на ЕОМ.

На рис. 2.5 зображена блок-схема алгоритму уточнення одного кореня рівняння (2.1) до заданого ступеня точності ϵ методом половинного ділення. Зі схеми видно: якщо навіть на певному наближенні з номером k станеться $F(c) = 0$, це не призведе до збою алгоритму.

Після реалізації даного алгоритму на ЕОМ результати розв'язання задачі прикладу 2.2 при $\epsilon = 10^{-6}$ отримані у вигляді:

Корінь рівняння: $x_0 = 1,399429$.

Кількість наближень: $k = 20$.

$F(x_0) = -0,000001$.

2.4. Метод простої ітерації і його реалізація на ЕОМ

Нехай дано нелінійне рівняння (2.1). Потрібно визначити дійсний корінь даного рівняння на відомому відрізку його ізоляції $[a, b]$.

Замінімо рівняння $F(x) = 0$ на рівносильне¹

$$x = \varphi(x). \tag{2.2}$$

Перше наближення до істинного значення x_0 обирається із відрізка ізоляції кореня довільним образом, тобто $x_1 \in [a, b]$. Для знаходження другого наближення підставимо значення x_1 у праву частину рівняння (2.2): $x_2 = \varphi(x_1)$. Третє і наступне наближення виконуються аналогічно: $x_3 = \varphi(x_2)$; $x_4 = \varphi(x_3)$; ...; $x_k = \varphi(x_{k-1})$.

Таким чином, метод простої ітерації (або метод послідовних наближень) здійснюється за рекурсивною формулою:

$$\left. \begin{aligned} x_1 \in [a, b]; x_k = \varphi(x_{k-1}), \\ k = 2, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \right\} \tag{2.3}$$

Процес послідовних наближень має просту геометричну інтерпретацію (див. рис. 2.6). Довільно оберемо значення $x_1 \in [a, b]$, тоді $x_2 = \varphi(x_1)$. Для того, щоб відкласти значення x_2 на осі абсцис, проведемо паралельно їй лінію M_1N_1 . Ордината точки N_1 дорівнює ординаті точки M_1 , а в силу того, що N_1 лежить на бісектрисі координатного кута $y = x$, ордината N_1 дорівнює абсцисі N_1 . Таким чином, $\varphi(x_1) = M_{1y}$, $M_{1y} = N_{1y} = N_{1x} = x_2 \Rightarrow \varphi(x_1) = x_2$. Якщо провести $M_2N_2 \parallel Ox$ і повторити аналогічні міркування, то можна переконатися, що на рис. 2.6 зображені $x_3 = \varphi(x_2)$, $x_4 = \varphi(x_3)$, ...

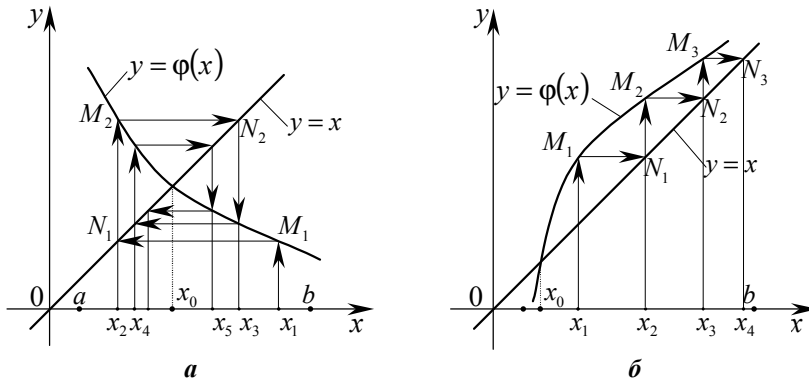


Рис. 2.6

¹ Відмітимо, що заміна (2.1) \Rightarrow (2.2) здійсненна завжди. Наприклад, рівняння вигляду (2.1) $2x - \sin x = 0$ легко перетворюється у рівняння вигляду (2.2): $x = 0,5 \sin x$. Рівняння $2^x - \cos x = 0$ перетворюється на (2.2), якщо зобразити $0 = x - x$. Тоді $x = x - 2^x + \cos x$ або $x = x + 2^x - \cos x$.

З рис. 2.6 видно, що послідовні обчислення за схемою (2.3) у деяких випадках дозволяють дістати уточнене значення кореня (рис. 2.6,*а*), а у деяких випадках, навпаки, кожне нове значення x_k віддаляється від істинного значення x_0 (рис. 2.6,*б*). Говорячи більш строго, при розв'язанні нелінійного рівняння методом ітерацій можливі два випадки:

1. Ітераційна послідовність $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ збігається, тобто має границю, яка буде коренем рівняння ($\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$). У цьому випадку метод простої ітерації є збіжним (див. рис. 2.6,*а*).

2. Метод ітерацій є розбіжним, коли послідовність $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$ розбігається, тобто не має границі (див. рис. 2.6,*б*).

Існування $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x_0$ означає, що істинне значення кореня x_0 може бути отримано шляхом реалізації нескінченного ітераційного процесу. Однак на практиці ітерації не можуть продовжуватися нескінченно, що призводить до необхідності на певному етапі зупинити процес обчислень, припускаючи при цьому деяку похибку методу ϵ .

Умова, за якої ітераційний процес збігається, і критерій оцінки точності методу простої ітерації виражає наступна теорема, наведена без доведення.

Нехай на відрізку ізоляції кореня $[a, b]$ існує єдиний корінь рівняння $x = \varphi(x)$, а функція $\varphi(x)$ визначена і диференційована на цьому відрізку, причому всі її значення $\varphi(x) \in [a, b]$. Тоді метод простої ітерації збігається при довільному виборі початкового наближення x_1 , якщо виконується умова

$$|\varphi'(x)| \leq q < 1. \quad (2.4)$$

Якщо дійсне число q визначається зі співвідношення (2.4), то критерієм закінчення ітераційного процесу уточнення кореня із заданим ступенем точності ϵ є умова

$$\left. \begin{aligned} |x_k - x_{k-1}| &\leq \frac{\epsilon(1-q)}{q}, \\ k &= 2, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Відзначимо, що умова (2.4) даної теореми не є необхідною. Це означає, що метод ітерацій може виявитися збіжним і при невиконанні даної умови.

Для практичної оцінки точності, значення q , яке входить в умову (2.5), обирається максимальним за модулем серед усіх значень похідної $\varphi'(x)$ на відрізку ізоляції кореня, тобто $q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)|$. Чим менше виявляється значення q , тим скоріше збігається метод ітерацій.

Приклад 2.3. Методом простої ітерації уточнити корінь рівняння $\sin 2x - \ln x = 0$ на відокремленому відрізку $[1; 1,6]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Перетворимо дане рівняння до ітераційного вигляду $x = x - \sin 2x + \ln x$ і перевіримо умову збіжності ітераційного процесу (2.4). Маємо: $|\varphi'(x)| = |1 - 2 \cos 2x + 1/x|$. За допомогою калькулятора легко перевірити, що $q = |\varphi'(1,6)| = 3,622 > 1$, отже, метод ітерацій для даного рівняння буде розбіжним.

Якщо на відрізку ізоляції кореня $F(x)$ змінюється монотонно, за допомогою нескладних перетворень завжди можна домогтися того, щоб для рівняння $x = \varphi(x)$ метод ітерацій збігався. Наведемо один із можливих способів таких перетворень.

Помножимо рівняння (2.1) на деяке дійсне число $p \neq 0$ і перетворимо отримане рівняння до ітераційного вигляду: $pF(x) = 0 \Rightarrow x = x - pF(x)$. Задовольняючи це рівняння умові (2.4), дістанемо: $|1 - pF'(x)| < 1$. Таким чином, для забезпечення збіжності методу послідовних наближень можна вимагати, щоб виконувалася умова $0 < \max_{[a, b]} \{pF'(x)\} \leq 1$.

Для нашого рівняння $F'(x) = 2 \cos 2x - 1/x$.

Протабулюємо отриману функцію на відрізку ізоляції кореня:

1	1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
-1,832	-2,086	-2,308	-2,483	-2,599	-2,647	-2,622

Отже, якщо обрати значення $p = -1/3$, умова для забезпечення збіжності $0 < \max_{[a, b]} \{pF'(x)\} \leq 1$ буде виконана.

Будемо здійснювати схему ітерацій (2.3), враховуючи (2.5) для рівняння $x = x + 1/3(\sin 2x - \ln x)$, помітивши, що $q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)| = 1 - |p| \cdot \min_{[a, b]} |F'(x)| =$

$$= 1 - \frac{1,832}{3} = 0,389. \text{ Тоді } \frac{\varepsilon(1-q)}{q} = \frac{10^{-3}(1-0,389)}{0,389} = 0,016.$$

Як перше наближення до кореня обираємо, наприклад, $x_1 = 1$ і ведемо розрахунок у таблиці.

Таким чином, на четвертій ітерації дістанемо:

$$x_0 = 1,40 \pm 0,01, \text{ а } |F(1,40)| = 0,00.$$

k	x_k	x_{k+1}	$ x_{k+1} - x_k $
1	1,000	1,303	0,303
2	1,303	1,385	0,082
3	1,385	1,397	0,012 < 0,016
4	1,397		

Алгоритм реалізації методу простої ітерації у випадку, коли він збігається до істинного значення кореня x_0 із заданою точністю ϵ , наведений на схемі, зображеної на рис. 2.7. На вхід даного алгоритму як параметр необхідно подавати значення $q = \max_{[a, b]} |\varphi'(x)|$ тільки в тому випадку, якщо $q < 1$. Алгоритм обчислення q наведений на рис. 2.8.

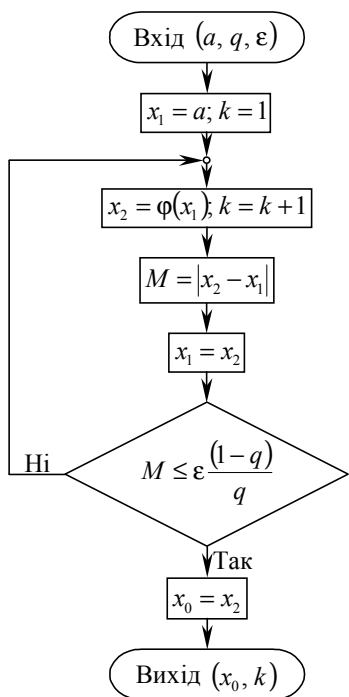


Рис. 2.7

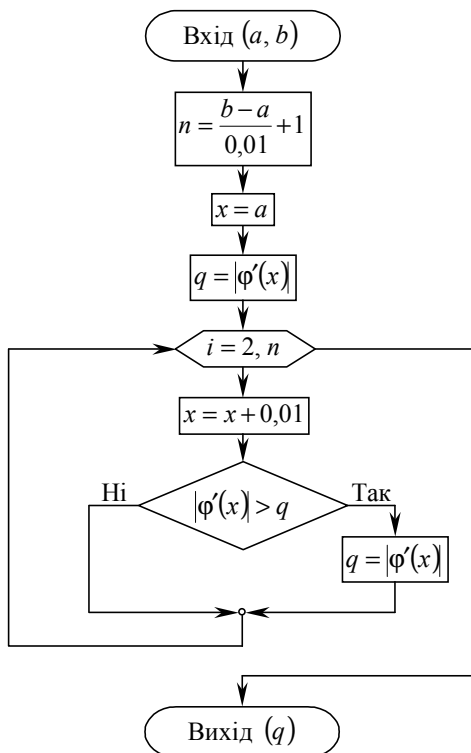


Рис. 2.8

Після реалізації даних алгоритмів на ЕОМ, розв'язок задачі прикладу 2.3 при $\epsilon = 10^{-6}$ отриманий у вигляді:

Корінь рівняння: $x_0 = 1,399429$. Кількість наближень: $k = 9$. $F(x_0) = 0,000000$.

2.5. Метод хорд і метод дотичних

Перш ніж приступити до розгляду даних методів, нагадаємо деякі корисні математичні твердження.

Функція $y = F(x)$ називається *зростаючою*, якщо зі зростанням аргументу x значення функції y збільшується. Якщо зі зростанням аргументу значення функції зменшується, то вона є *спадною*.

ЧАСТИНА ДРУГА

Функція називається *монотонною*, якщо в межах заданого відрізка вона або тільки зростає, або тільки спадає.

Якщо перша похідна $F'(x)$ у межах деякого відрізка додатна і зберігає свій знак, то функція $F(x)$ на цьому відрізку монотонно зростає. Якщо у межах деякого відрізка $F'(x)$ від'ємна і зберігає свій знак, то $F(x)$ на цьому відрізку монотонно спадає.

Якщо друга похідна $F''(x)$ у межах деякого відрізка додатна і зберігає свій знак, то графік функцій $F(x)$, побудований на цьому відрізку, є опуклим униз. Якщо у межах деякого відрізка $F''(x)$ від'ємна і зберігає постійний знак, то графік $F(x)$ буде опуклим уверх.

Як вже зазначалось в підрозд. 2.2, для існування на відрізку $[a, b]$ одного єдиного значення кореня необхідно і достатньо, щоб $F(a) \cdot F(b) < 0$ і функція $F(x)$ у межах $[a, b]$ була монотонна.

Якщо додатково поставити вимогу, щоб функція $F''(x)$ також була монотонною у межах $[a, b]$, то можливі наступні чотири випадки поведінки $F(x)$ на відрізку ізоляції кореня (див. рис. 2.9).

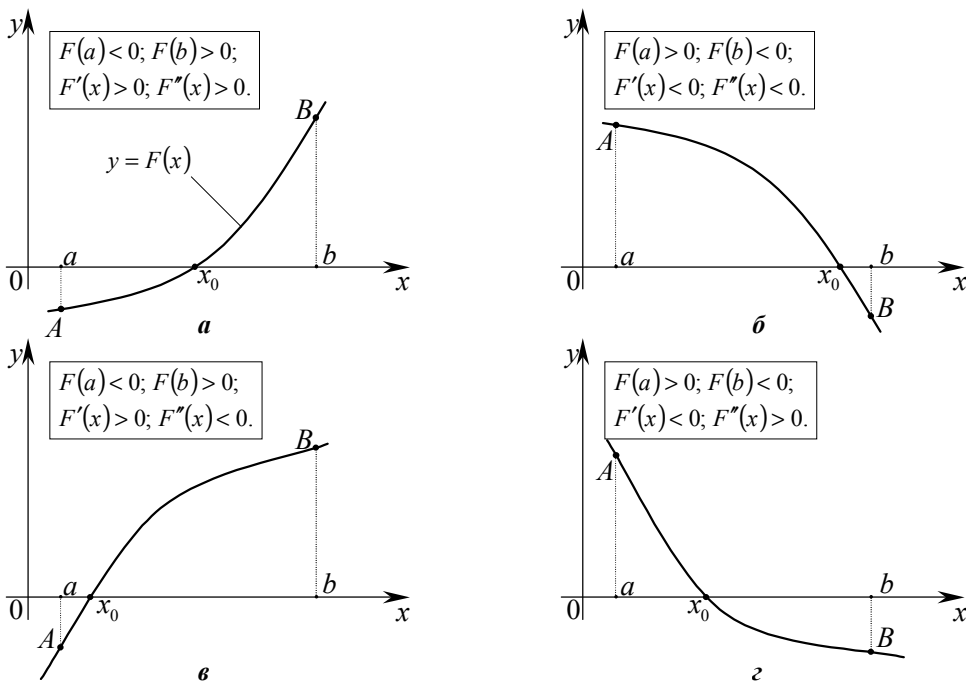


Рис. 2.9

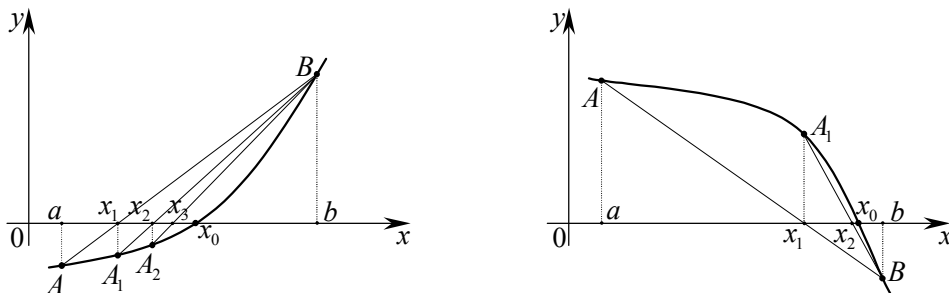
Метод хорд і його реалізація на ЕОМ

Даний метод іноді зустрічається в літературі під назвами *метод помилкового припущення* і *метод пропорційних частин*.

Нехай дано нелінійне рівняння (2.1), де $F(x)$ – неперервна на відрізку ізоляції кореня $[a, b]$ функція, яка має на ньому неперервні та знакопостійні похідні першого і другого порядків.

Ідея *методу хорд* полягає в тому, що на відрізку $[a, b]$ дуга кривої $y = F(x)$ стягується хордою AB і як наближене значення кореня береться точка перетинання AB з віссю Ox .

Розглянемо окремо випадки, зображені на рис. 2.9, **а, б**. Видно, що перша і друга похідна від функції $F(x)$ мають однакові знаки, тобто $F'(x) \cdot F''(x) > 0$:



З аналітичної геометрії відомо, що рівняння прямої, яка проходить через дві точки $A(x_1, y_1)$ і $B(x_2, y_2)$, має вигляд $\frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(y - y_1)}{(y_2 - y_1)}$. У нашому випадку для хорди AB маємо $A(a, F(a))$ і $B(b, F(b))$, отже

$$\frac{x - a}{b - a} = \frac{y - F(a)}{F(b) - F(a)}.$$

Для знаходження x_1 (точки перетинання хорди з віссю Ox) підставимо в це рівняння значення $y = 0$ і дістанемо

$$x_1 = a - \frac{F(a)(b - a)}{F(b) - F(a)}.$$

Знайдена формула має назву *формули методу хорд*. Тепер корінь рівняння лежить у межах відрізка $[x_1, b]$. Якщо точність обчисленого значення x_1 недостатня, то необхідно виконати наступне наближення до кореня, застосовуючи метод хорд до відрізка $[x_1, b]$:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(b - x_1)}{F(b) - F(x_1)}.$$

Продовжуючи процес наближень далі, знаходимо:

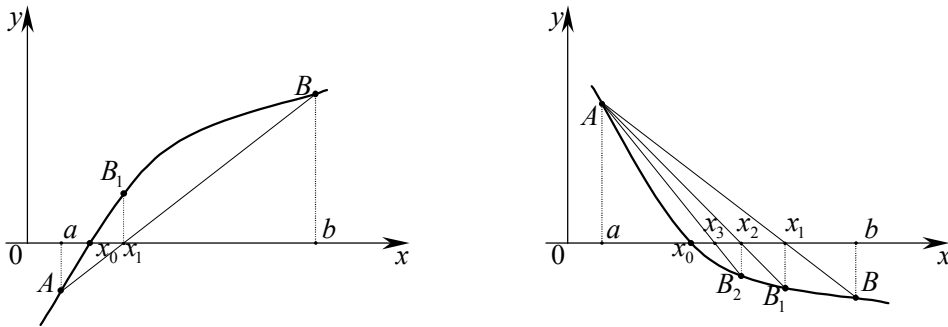
$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)(b-x_2)}{F(b)-F(x_2)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{F(x_3)(b-x_3)}{F(b)-F(x_3)}, \dots,$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})(b-x_{k-1})}{F(b)-F(x_{k-1})}.$$

Таким чином, коли $F'(x) \cdot F''(x) > 0$, обчислення в рамках методу хорд здійснюється за рекурсивною формулою:

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a - \frac{F(a)(b-a)}{F(b)-F(a)}; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})(b-x_{k-1})}{F(b)-F(x_{k-1})} \\ k &= 2, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

Тепер розглянемо випадки, зображені на рис. 2.9, в, з, коли $F'(x) \cdot F''(x) < 0$:



За аналогією з графічною інтерпретацією методу половинного ділення, зображеною на рис. 2.4, можна сказати наступне: при уточненні кореня методом хорд (коли $F'(x) \cdot F''(x) < 0$) рухомою точкою є точка b відрізка ізоляції кореня, а точка a залишається нерухомою. Виходячи з цього, складемо рівняння хорди AB з точки B у точку A :

$$\frac{x-b}{a-b} = \frac{y-F(b)}{F(a)-F(b)}.$$

Підставляючи в це рівняння $y = 0$, отримуємо x_1 як точку перетину хорди з віссю Ox :

$$x_1 = b - \frac{F(b)(b-a)}{F(b)-F(a)}.$$

Тепер шуканий корінь x_0 належить відріzkу $[a, x_1]$, а для подальшого уточнення кореня знову застосуємо метод хорд на цьому відріzkу:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(x_1 - a)}{F(x_1) - F(a)}.$$

Продовжуючи процес наближень далі, знаходимо:

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)(x_2 - a)}{F(x_2) - F(a)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{F(x_3)(x_3 - a)}{F(x_3) - F(a)}, \quad \dots,$$

$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})(x_{k-1} - a)}{F(x_{k-1}) - F(a)}.$$

Таким чином, коли $F'(x) \cdot F''(x) < 0$, обчислення в рамках методу хорд здійснюється за наступною схемою:

$$x_1 = b - \frac{F(b)(b - a)}{F(b) - F(a)}; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})(x_{k-1} - a)}{F(x_{k-1}) - F(a)}, \quad \left. \begin{array}{l} \\ k = 2, 3, 4, \dots, n. \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Процес обчислень за формулами (2.6) або (2.7) продовжується доти, поки ми не дістанемо наближений корінь із заданою точністю ϵ . Без доведення відзначимо, що для оцінки похибки методу хорд можна користуватися формулою

$$\frac{|F(x_k)|}{\min_{[a, b]} |F'(x)|} \leq \epsilon. \quad (2.8)$$

Необхідно відмітити, що вибір тої чи іншої рекурсивної формули для уточнення кореня в рамках методу хорд можна здійснити без обчислення $F'(x)$ користуючись очевидним правилом: *якщо на деякому кінці відрізка $[a, b]$ знак функції $F(x)$ не співпадає зі знаком другої похідної $F''(x)$ то цей кінець є рухомим*. Іншими словами, якщо $F(a) \cdot F''(x) < 0$, то рухомим є кінець a і обчислення необхідно здійснювати за формулою (2.6). У протилежному випадку, якщо $F(a) \cdot F''(x) > 0$, рухомим кінцем є b і обчислення здійснюються за формулою (2.7).

Приклад 2.4. Методом хорд уточнити корінь рівняння $\sin 2x - \ln x = 0$ на відокремленому відріzkу $[1; 1,6]$ з точністю $\epsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Визначимо знак другої похідної і встановимо, за якою формулою необхідно проводити обчислення:

$$F''(a = 1) = -2,673 \Rightarrow F''(x) < 0. \quad F(a = 1) = 0,909 \Rightarrow F(a) > 0.$$

ЧАСТИНА ДРУГА

Таким чином, $F(a) \cdot F''(x) < 0 \Rightarrow$ рухомим є кінець $a \Rightarrow$ обчислення

здійснюємо за схемою (2.6) доти, поки $\frac{|F(x_k)|}{\min_{[a, b]}|F'(x)|} \leq \epsilon$.

Протабулюємо функцію $F'(x)$ на відрізку $[1; 1,6]$ (див. приклад 2.3) і дістанемо $\min = 1,832$. Умову закінчення процесу уточнення кореня для практичних обчислень зручно записати у вигляді $|F(x_k)| \leq \epsilon \cdot \min \leq 0,018$.

$$x_1 = a - \frac{F(a)(b-a)}{F(b)-F(a)} = 1 - \frac{F(1) \cdot 0,6}{F(1,6) - F(1)} = 1,379; F(1,379) = 0,052 > 0,018.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)(b-x_1)}{F(b)-F(x_1)} = 1 - \frac{F(1,379) \cdot 0,221}{F(1,6) - F(1,379)} = 1,399; F(1,399) = 0,002 < 0,018.$$

Таким чином, друге наближення до кореня дозволяє записати остаточну відповідь:

$$x_0 = 1,40 \pm 0,01, \text{ а } |F(1,40)| = 0,00.$$

Алгоритм реалізації методу хорд для розв'язання рівняння (2.1) із заданою точністю ϵ наведений на схемі, зображеної на рис. 2.10. На вхід даного алгоритму як параметр необхідно подавати значення $\min = \min_{[a, b]}|F'(x)|$, яке попередньо обчислюється за схемою, наведеною на рис. 2.11.

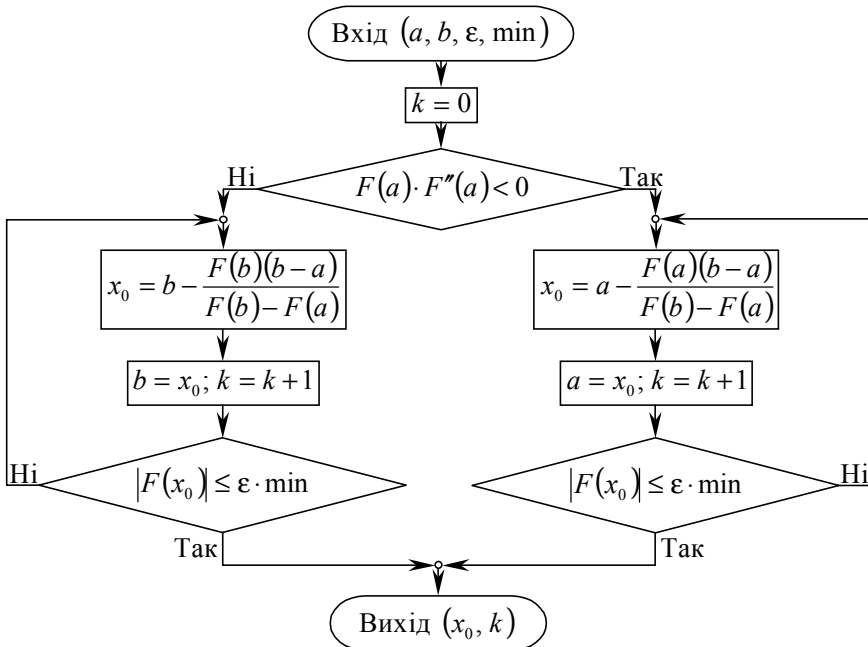


Рис. 2.10

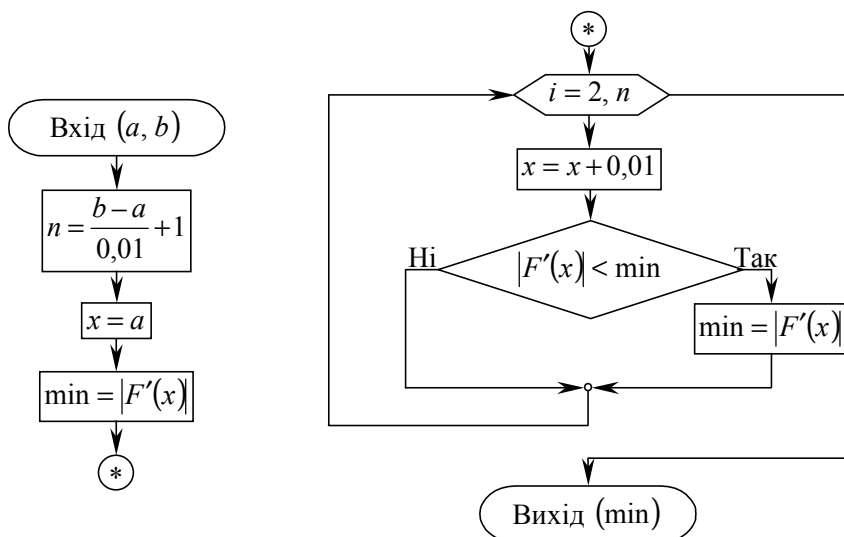


Рис. 2.11

Після реалізації даних алгоритмів на ЕОМ результат розв'язання задачі прикладу 2.4 при $\epsilon = 10^{-6}$ отриманий у вигляді:

Корінь рівняння: $x_0 = 1,399429$. Кількість наближень: $k = 4$. $F(x_0) = 0,000000$.

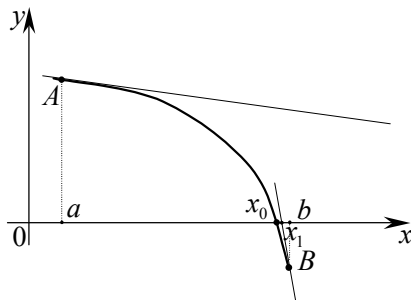
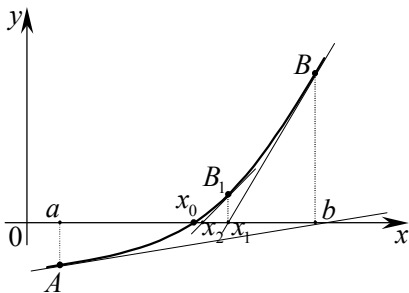
Метод дотичних і його реалізація на ЕОМ

Метод дотичних (метод Ньютона) аналогічний методу хорд.

Нехай дано нелінійне рівняння (2.1), де $F(x)$ – неперервна на відрізьку ізоляції кореня $[a, b]$ функція, яка має на ньому неперервні та знакопостійні похідні першого і другого порядків.

Геометричний зміст методу дотичних полягає в тому, що на малому відрізьку $[a, b]$ дуга кривої $y = F(x)$ замінюється дотичною до цієї кривої і як наближене значення кореня береться точка перетинання цієї дотичної з віссю Ox .

Розглянемо окремо випадки, коли $F'(x) \cdot F''(x) > 0$ (див. рис. 2.9, а, б):



Проведемо дотичну до кривої $y = F(x)$ у точці B (якщо провести дотичну у точці A , то вона перетне Ox в деякій точці, яка не належить відрізку $[a, b]$).

З аналітичної геометрії відомо, що рівняння дотичної до кривої у деякій точці $C(x_c, y_c)$ має вигляд: $y - y_c = k(x - x_c)$, де $k = y'(x_c)$ – кутовий коефіцієнт. У нашому випадку для дотичної у точці $B(b, F(b))$ маємо

$$y - F(b) = F'(b)(x - b).$$

Для знаходження x_1 покладемо $y = 0$ і дістанемо

$$x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}.$$

Знайдена формула має назву *формули методу дотичних*. Тепер корінь рівняння лежить у межах відрізка $[a, x_1]$. Якщо точність обчисленого значення x_1 недостатня, то необхідно виконати наступне наближення до кореня, застосовуючи метод дотичних на відрізку $[a, x_1]$:

$$x_2 = x_1 - \frac{F(x_1)}{F'(x_1)}.$$

Продовжуючи процес наближень далі, знаходимо:

$$x_3 = x_2 - \frac{F(x_2)}{F'(x_2)}, \quad x_4 = x_3 - \frac{F(x_3)}{F'(x_3)}, \dots$$

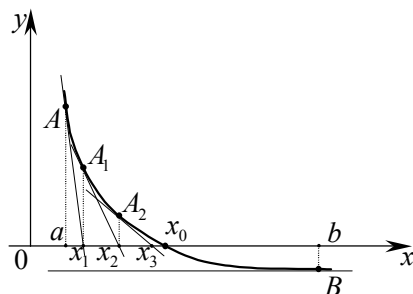
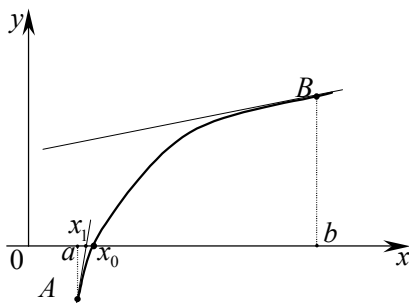
$$x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}.$$

Таким чином, коли $F'(x) \cdot F''(x) > 0$ обчислення в рамках методу дотичних здійснюються за рекурсивною формулою

$$\left. \begin{aligned} x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)}; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}, \\ k = 2, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

За схемою (2.9) обчислюється послідовність наближених значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, кожен наступний член якої ближче до кореня x_0 , ніж попередній. При цьому рухомим є кінець b відрізка ізоляції кореня, а кожен член зазначеної послідовності залишається більше істинного кореня x_0 , тобто x_k – наближене значення кореня x_0 з перевишкою. Відмітимо, що в той же самий час метод хорд за схемою (2.6) дає значення x_k з недостачею, причому рухомим є кінець a .

У другому випадку, коли $F'(x) \cdot F''(x) < 0$ (див. рис. 2.9, в, г), міркування аналогічні, тільки дотичну до кривої $y = F(x)$ необхідно проводити у точці $A(a, F(a))$:



Таким чином,

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a - \frac{F(a)}{F'(a)}; \quad x_k = x_{k-1} - \frac{F(x_{k-1})}{F'(x_{k-1})}, \\ k &= 2, 3, 4, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

За схемою (2.10) обчислюється послідовність наближених значень $x_1, x_2, x_3, \dots, x_k$, кожен наступний член якої ближче до кореня x_0 , ніж попередній. При цьому рухомим кінцем відрізка ізоляції кореня є a , внаслідок чого x_k – наближене значення кореня x_0 з недостаткою. Відзначимо, що в той же самий час метод хорд за схемою (2.7) дає значення x_k з перевишкою, причому рухомим кінцем є b .

Схеми (2.9) і (2.10) відрізняються тільки значенням початкового наближення до кореня x_1 . При виборі початкового наближення (аналогічно методу хорд) можна керуватися наступним правилом: *за початкову точку у виразі для x_1 слід вибирати той кінець відрізка $[a, b]$, в якому знак функції $F(x)$ співпадає зі знаком її другої похідної.*

Для оцінки похибки приблизно обчисленого кореня x_k можна користуватися формулою (2.8). Без доведення відзначимо, що ця формула є загальною для методів хорд і дотичних.

Приклад 2.5. Методом дотичних уточнити корінь рівняння $\sin 2x - \ln x = 0$ на відокремленому відрізку $[1; 1,6]$ з точністю $\varepsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Для розв'язання даної задачі будемо користуватися результатами обчислень, отриманих у прикладі 2.4.

Оскільки $F(a) \cdot F''(x) < 0$, то

$$x_1 = b - \frac{F(b)}{F'(b)} = 1,6 - \frac{F(1,6)}{F'(1,6)} = 1,398; \quad F(1,398) = 0,003 < 0,018.$$

Таким чином, уже перше наближення до кореня дозволяє записати:

$$x_0 = 1,40 \pm 0,01, \text{ а } |F(1,40)| = 0,00.$$

Алгоритм реалізації методу дотичних із заданою точністю ϵ з урахуванням алгоритму, зображеного на рис. 2.11, наведено на рис. 2.12.

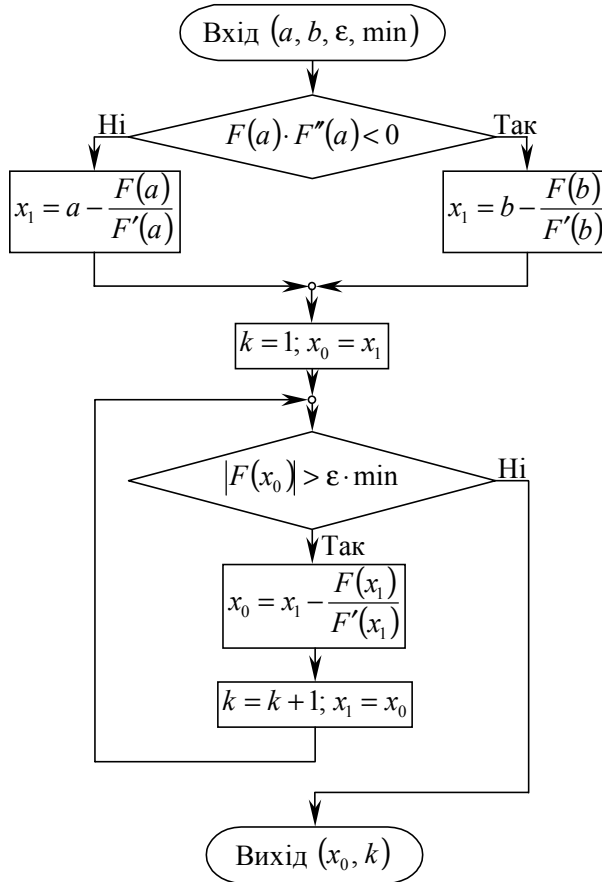


Рис. 2.12

Після реалізації даних алгоритмів на ЕОМ результат розв'язання задачі прикладу 2.5 при $\epsilon = 10^{-6}$ отриманий у вигляді:

Корінь рівняння: $x_0 = 1,399429$. Кількість наближень: $k = 2$. $F(x_0) = -0,000000$.

3. ЧИСЕЛЬНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ. МЕТОД ГАУССА І РЕАЛІЗАЦІЯ ЙОГО НА ЕОМ

Обчислювальні методи лінійної алгебри відіграють особливу роль у чисельному аналізі. Це обумовлено, по меншій мірі, двома причинами.

По-перше, більшість лінійних задач математичного аналізу, диференціальних та інтегральних рівнянь зводяться до розв'язання задач лінійної алгебри, насамперед до розв'язання *систем лінійних алгебраїчних рівнянь* (СЛАР). Таким чином, чисельні методи розв'язання СЛАР часто є інструментом чисельного розв'язання великого класу математичних, а отже, і науково-технічних задач.

По-друге, відомо, що більшість методів розв'язання нелінійних задач також зводяться до розв'язання деякої послідовності лінійних систем. Справа у тому, що більшість нелінійних моделей в малому околі деякого розв'язку можна описати лінійними моделями. Відповідно, першим кроком розв'язання нелінійних задач є дослідження лінеаризованих моделей та застосування чисельних методів лінійної алгебри (зокрема, чисельних методів розв'язання СЛАР).

Нехай подана система лінійних алгебраїчних рівнянь n -го порядку:

$$\left. \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \dots + a_{nn}x_n = b_n. \end{array} \right\} \quad (3.1)$$

Дана СЛАР може бути записана в матричному вигляді:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B}$$

$$\text{де } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ – квадратна матриця вимірністю } n \times n$$

коефіцієнтів при невідомих системи a_{ij} , де індекс $i = 1, 2, 3, \dots, n$ визначає номер рядка матриці, а $j = 1, 2, 3, \dots, n$ – номер стовпця;

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – } n\text{-вимірний вектор-стовпець вільних членів (правих частин) си-}$$

стеми b_j ;

$\mathbf{X} = (x_1 \ x_2 \ x_3 \ \dots \ x_n)$ – n -вимірний вектор-рядок невідомих системи x_j .

Розв'язком СЛАР (3.1) називається будь-яка сукупність чисел (коренів) $x_1 = c_1, x_2 = c_2, x_3 = c_3, \dots, x_n = c_n$, яка будучи підставлена на місце невідомих системи, перетворює всі ці рівняння у тотожності.

Якщо система (3.1) має розв'язок, то вона називається сумісною, якщо немає розв'язку – несумісною чи суперечною.

Сумісна СЛАР може мати одне або кілька розв'язків. Якщо СЛАР має один єдиний розв'язок, то вона називається визначеною, а якщо більше одного розв'язку, то невизначеною.

Якщо коефіцієнти одного з рівнянь системи є лінійною комбінацією коефіцієнтів інших рівнянь, то система невизначена.

Проілюструємо зазначене наступним прикладом. Нехай подана СЛАР

$$2\text{-го порядку } \left. \begin{matrix} x_1 + x_2 = 1, \\ 3x_1 + 3x_2 = 3. \end{matrix} \right\} \text{ Видно, що коефіцієнти першого рівняння отри-}$$

мані з коефіцієнтів другого рівняння лінійним перетворенням $a_{1j} = a_{2j} - 2$. Внаслідок цього визначник матриці коефіцієнтів при невідомих системи

$$\det \mathbf{A} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ і, отже, система має нескінченну множину розв'язків, яку}$$

можна отримати за формулами $\left. \begin{matrix} x_1 = t, \\ x_2 = 1 - t, \end{matrix} \right\}$ де t – довільний параметр.

При розв'язанні СЛАР (3.1) методом Гауса вводиться поняття *головного елемента*. При виключенні невідомого x_1 – це елемент a_{11} , який повинен бути максимальним за модулем у першому стовпці системи. Якщо це не так, то перше рівняння і те рівняння системи, в якому $|a_{i1}| = \max$, необхідно поміняти місцями. Пошук головного елемента та відповідне переставлення рядків у рамках методу Гауса називається *методом виключення невідомих з частковим упорядкуванням за рядками*. Доцільність використання саме цього методу стане зрозумілою дещо пізніше, коли буде обговорюватися питання створення алгоритму для практичної реалізації методу Гауса на ЕОМ.

Будемо виключати невідоме x_1 із усіх рівнянь системи (3.1), крім першого. Для цього (після часткового упорядкування) розділимо кожне рівняння цієї системи на коефіцієнт a_{i1} при x_1 та віднімемо перше рівняння від усіх інших.

а) Ділення всіх рівнянь системи (3.1) на a_{i1} :

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ x_1 + \frac{a_{22}}{a_{21}}x_2 + \frac{a_{23}}{a_{21}}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}}{a_{21}}x_n &= \frac{b_2}{a_{21}}, \\ x_1 + \frac{a_{32}}{a_{31}}x_2 + \frac{a_{33}}{a_{31}}x_3 + \dots + \frac{a_{3n}}{a_{31}}x_n &= \frac{b_3}{a_{31}}, \\ \dots\dots\dots, \\ x_1 + \frac{a_{n2}}{a_{n1}}x_2 + \frac{a_{n3}}{a_{n1}}x_3 + \dots + \frac{a_{nn}}{a_{n1}}x_n &= \frac{b_n}{a_{n1}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

б) Віднімання першого рівняння від усіх інших рівнянь системи (3.2):

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \left(\frac{a_{22}}{a_{21}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)x_2 + \left(\frac{a_{23}}{a_{21}} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)x_3 + \dots + \left(\frac{a_{2n}}{a_{21}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right)x_n &= \frac{b_2}{a_{21}} - \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \left(\frac{a_{32}}{a_{31}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)x_2 + \left(\frac{a_{33}}{a_{31}} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)x_3 + \dots + \left(\frac{a_{3n}}{a_{31}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right)x_n &= \frac{b_3}{a_{31}} - \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \dots\dots\dots, \\ \left(\frac{a_{n2}}{a_{n1}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \right)x_2 + \left(\frac{a_{n3}}{a_{n1}} - \frac{a_{13}}{a_{11}} \right)x_3 + \dots + \left(\frac{a_{nn}}{a_{n1}} - \frac{a_{1n}}{a_{11}} \right)x_n &= \frac{b_n}{a_{n1}} - \frac{b_1}{a_{11}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

Позначивши нові коефіцієнти при невідомих системи (3.3) як a_{ij}^1 , а праві частини $-b_i^1$ ($i, j = 2, 3, 4, \dots, n$), запишемо:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^1x_2 + a_{23}^1x_3 + \dots + a_{2n}^1x_n &= b_2^1, \\ a_{32}^1x_2 + a_{33}^1x_3 + \dots + a_{3n}^1x_n &= b_3^1, \\ \dots, \\ a_{n2}^1x_2 + a_{n3}^1x_3 + \dots + a_{nn}^1x_n &= b_n^1. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

Аналогічно виключенню невідомого x_1 із другого та наступних рівнянь системи (3.1) можна виключити невідоме x_2 із третього та наступних рівнянь системи (3.4). Для цього до системи рівнянь $(n - 1)$ -го порядку, яка дістається, якщо з системи (3.4) викреслити перше рівняння, після часткового упорядкування необхідно застосувати перетворення "а" та "б":

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 + \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1}x_n &= \frac{b_2^1}{a_{22}^1}, \\ x_2 + \frac{a_{33}^1}{a_{32}^1}x_3 + \dots + \frac{a_{3n}^1}{a_{32}^1}x_n &= \frac{b_3^1}{a_{32}^1}, \\ \dots, \\ x_2 + \frac{a_{n3}^1}{a_{n2}^1}x_3 + \dots + \frac{a_{nn}^1}{a_{n2}^1}x_n &= \frac{b_n^1}{a_{n2}^1}. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 + \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1}x_n &= \frac{b_2^1}{a_{22}^1}, \\ \left(\frac{a_{33}^1}{a_{32}^1} - \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1} \right)x_3 + \dots + \left(\frac{a_{3n}^1}{a_{32}^1} - \frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1} \right)x_n &= \frac{b_3^1}{a_{32}^1} - \frac{b_2^1}{a_{22}^1}, \\ \dots, \\ \left(\frac{a_{n3}^1}{a_{n2}^1} - \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1} \right)x_3 + \dots + \left(\frac{a_{nn}^1}{a_{n2}^1} - \frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1} \right)x_n &= \frac{b_n^1}{a_{n2}^1} - \frac{b_2^1}{a_{22}^1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ЧАСТИНА ДРУГА

Позначивши нові коефіцієнти при невідомих системи (3.5) як a_{ij}^2 , а праві частини $-b_i^2$ ($i, j = 3, 4, 5, \dots, n$), запишемо:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^1x_2 + a_{23}^1x_3 + \dots + a_{2n}^1x_n &= b_2^1, \\ a_{33}^2x_3 + \dots + a_{3n}^2x_n &= b_3^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_{n3}^2x_3 + \dots + a_{nn}^2x_n &= b_n^2. \end{aligned} \right\}$$

Аналогічні перетворення необхідно проводити до того часу, поки з останнього рівняння системи не буде виключено x_{n-1} . Результатом перетворень буде еквівалентна системі (3.1) наступна СЛАР *трикутного вигляду*:

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{22}^1x_2 + a_{23}^1x_3 + \dots + a_{2n}^1x_n &= b_2^1, \\ a_{33}^2x_3 + \dots + a_{3n}^2x_n &= b_3^2, \\ &\dots\dots\dots, \\ a_{nn}^{n-1}x_n &= b_n^{n-1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Із системи (3.6) послідовно знаходять значення всіх невідомих, починаючи з останнього:

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}} \Rightarrow x_{n-1} = \frac{b_{n-1}^{n-2} - a_{n-1, n}^{n-2} x_n}{a_{n-1, n-1}^{n-2}} \Rightarrow \\ \Rightarrow x_{n-2} &= \frac{b_{n-2}^{n-3} - a_{n-2, n-1}^{n-3} x_{n-1} - a_{n-2, n}^{n-3} x_n}{a_{n-2, n-2}^{n-3}} \Rightarrow \dots \Rightarrow \\ \Rightarrow x_1 &= \frac{b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Таким чином, процес розв'язання СЛАР (3.1) методом Гаусса включає в себе два етапи. Перший етап полягає у послідовному виключенні невідомих і призводить до системи вигляду (3.6), називається *прямим ходом*. Другий етап складається з послідовного знаходження значень невідомих (коренів системи) за формулами (3.7) і називається *зворотнім ходом*.

Приклад 3.1. За допомогою схеми Гаусса розв'язати наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ 5x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Розв'язання. Застосуємо прямий хід методу Гаусса з частковим упорядкуванням за рядками:

Знаходимо максимальний за модулем елемент у першому стовпці та міняємо місцями відповідні рядки:

$$\left. \begin{aligned} 5x_1 + x_2 - x_3 &= 2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 &= 5, \\ 4x_1 - x_2 - x_3 &= 3. \end{aligned} \right\}$$

Виключаємо невідоме x_1 з другого і третього рівнянь:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 &= \frac{2}{5}, \\ x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 &= \frac{5}{2}, \\ x_1 - \frac{1}{4}x_2 - \frac{1}{4}x_3 &= \frac{3}{4}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 &= \frac{2}{5}, \\ -\frac{7}{10}x_2 + \frac{7}{10}x_3 &= \frac{21}{10}, \\ -\frac{9}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3 &= \frac{7}{20}. \end{aligned} \right\}$$

Оскільки $7/10 > 9/20$, рядки не переставляємо:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 &= \frac{2}{5}, \\ -\frac{7}{10}x_2 + \frac{7}{10}x_3 &= \frac{21}{10}, \\ -\frac{9}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_3 &= \frac{7}{20}. \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

Виключаємо невідоме x_2 з третього рівняння:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 &= \frac{2}{5}, \\ x_2 - x_3 &= -3, \\ x_2 + \frac{1}{9}x_3 &= -\frac{7}{9}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{5}x_2 - \frac{1}{5}x_3 &= \frac{2}{5}, \\ x_2 - x_3 &= -3, \\ \frac{10}{9}x_3 &= \frac{20}{9}. \end{aligned} \right\}$$

Нарешті зворотнім ходом дістанемо $x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = -3 + 2 = -1 \Rightarrow x_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}(-1) + \frac{1}{5} \cdot 2 = 1$.

Таким чином, $x_1 = 1; x_2 = -1; x_3 = 2$.

Перевіримо правильність отриманих коренів шляхом обчислення відхилів:

$$\left. \begin{aligned} z_1 &= 2 - 5 \cdot 1 + 1 + 2 \equiv 0, \\ z_2 &= 5 - 2 \cdot 1 - 1 - 2 \equiv 0, \\ z_3 &= 3 - 4 \cdot 1 - 1 + 2 \equiv 0. \end{aligned} \right\}$$

Потреба у чисельній реалізації на ЕОМ методу Гаусса пов'язана в основному з вимірністю СЛАР. Розв'язок СЛАР малої вимірності можна дістати аналітично у вигляді формул (як це було зроблено у прикладі 3.1). Якщо вимірність СЛАР $n \geq 5$, то аналітичний розв'язок дістати важко через велику кількість та громіздкість перетворень, і саме в таких випадках доводиться використовувати ЕОМ.

Для розробки алгоритму розв'язання СЛАР методом Гаусса перетворимо системи (3.3) та (3.5) до наступного вигляду:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \frac{a_{13}}{a_{11}}x_3 + \dots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n &= \frac{b_1}{a_{11}}, \\ \left(a_{22} - a_{12} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{23} - a_{13} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_3 + \dots + \left(a_{2n} - a_{1n} \frac{a_{21}}{a_{11}} \right) x_n &= \\ &= b_2 - b_1 \frac{a_{21}}{a_{11}}, \\ \left(a_{32} - a_{12} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{33} - a_{13} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) x_3 + \dots + \left(a_{3n} - a_{1n} \frac{a_{31}}{a_{11}} \right) x_n &= \\ &= b_3 - b_1 \frac{a_{31}}{a_{11}}, \\ \dots, \\ \left(a_{n2} - a_{12} \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) x_2 + \left(a_{n3} - a_{13} \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) x_3 + \dots + \left(a_{nn} - a_{1n} \frac{a_{n1}}{a_{11}} \right) x_n &= \\ &= b_n - b_1 \frac{a_{n1}}{a_{11}}. \end{aligned} \right\} (3.3^1)$$

$$\left. \begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ x_2 + \frac{a_{23}^1}{a_{22}^1}x_3 + \dots + \frac{a_{2n}^1}{a_{22}^1}x_n &= \frac{b_2^1}{a_{22}^1}, \\ \left(a_{33}^1 - a_{23}^1 \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} \right) x_3 + \dots + \left(a_{3n}^1 - a_{2n}^1 \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1} \right) x_n &= b_3^1 - b_2^1 \frac{a_{32}^1}{a_{22}^1}, \\ \dots, \\ \left(a_{n3}^1 - a_{23}^1 \frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1} \right) x_3 + \dots + \left(a_{nn}^1 - a_{2n}^1 \frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1} \right) x_n &= b_n^1 - b_2^1 \frac{a_{n2}^1}{a_{22}^1}. \end{aligned} \right\} (3.5^1)$$

Як видно з (3.31) та (3.51), при обчисленні нових коефіцієнтів при невідомих $a_{ij}^1, a_{ij}^2, a_{ij}^3, \dots$, які входять у систему трикутного вигляду (3.6), виключається можливість виконання неприпустимої операції ділення на нуль. Справа в тому, що проведені перетворення (3.3) \Rightarrow (3.3¹) та (3.5) \Rightarrow (3.5¹) дозволяють виконувати ділення тільки на головні елементи $a_{11}, a_{22}^1, a_{33}^2, \dots$, а оскільки абсолютне значення головного елемента є максимальним за модулем у відповідному стовпці, то воно не може дорівнювати нулю.

На першому кроці (при виключенні невідомого x_1) головним елементом є a_{11} . На наступному кроці (при виключенні x_2) головним буде a_{22}^1 потім $a_{33}^2, a_{44}^3, \dots, a_{n-1, n-1}^{n-2}$. Введемо додаткову змінну k для позначення номера головного елемента ($k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$).

Таким чином, нові коефіцієнти при невідомих та праві частини СЛАР на першому та наступних кроках прямого ходу можна алгоритмічно визначити за формулами

$$\left. \begin{aligned} a_{ij}^k &= a_{ij}^{k-1} - a_{kj}^{k-1} \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}; \quad a_{ik} = 0; \\ b_i^k &= b_i^{k-1} - b_k^{k-1} \frac{a_{ik}^{k-1}}{a_{kk}^{k-1}}, \\ k &= 1, 2, 3, \dots, n-1; \\ i, j &= k+1, k+2, k+3, \dots, n. \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

Згідно формул (3.7), зворотній хід також можна виразити алгоритмічно:

$$\left. \begin{aligned} x_n &= \frac{b_n^{n-1}}{a_{nn}^{n-1}}; \quad x_i = \frac{b_i^{i-1} - \sum_{j=i+1, i+2, \dots}^n a_{ij}^{i-1} x_j}{a_{ii}^{i-1}}, \\ i &= n-1, n-2, n-3, \dots, 1. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

На рис. 3.1 наведено структурно-логічну схему алгоритму для знаходження коренів системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом Гаусса з частковим упорядкуванням за рядками. Розрахунок абсолютної похибки отриманих коренів здійснюється за формулою $z_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j - b_i$ ($i = 1, 2, 3, \dots, n$),

згідно з алгоритмом на рис. 3.2.

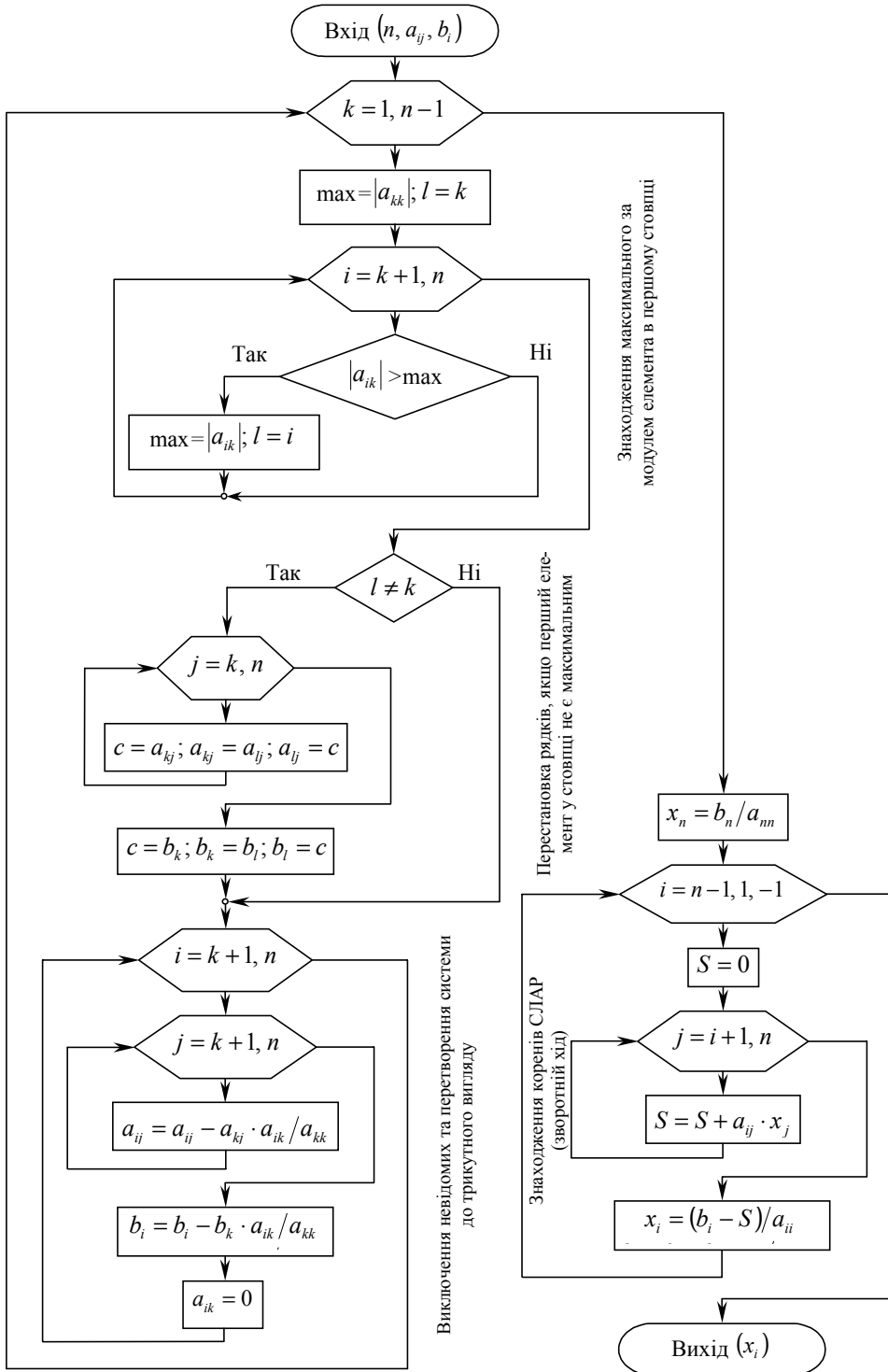


Рис. 3.1

Після реалізації даних алгоритмів на ЕОМ для СЛАР

$$\left. \begin{aligned} 12,345x_1 - 11,234x_2 + 5,678x_3 + 11,345x_4 &= -12,345, \\ -2,123x_1 + 34,567x_2 + 11,234x_3 + 0,234x_4 &= 23,456, \\ 0,234x_1 + 12,998x_2 - 11,234x_3 + 12,456x_4 &= -23,456, \\ 9,234x_1 - 12,456x_2 + 3,456x_3 - 0,345x_4 &= -1,234, \end{aligned} \right\}$$

отримуємо наступні результати:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2,0820325983E - 01; \\ x_2 &= 2,9750067942E - 01; \\ x_3 &= 1,1570646408E + 00; \\ x_4 &= -1,1460926536E + 00. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= 0,0000000000E + 00; \\ z_2 &= 2,9103830457E - 11; \\ z_3 &= -2,9103830457E - 11; \\ z_4 &= 1,8189894035E - 12. \end{aligned}$$

Якщо наближені значення коренів, обчислених за схемою Гаусса, є достатньо точними, то їх уточнювати непотрібно.

У випадку необхідності можна уточнити розв'язок системи. Для цього достатньо розв'язати СЛАР із початковою матрицею коефіцієнтів, але з новим стовпцем правих частин, які складаються з відхилів (при цьому можна користуватися тією ж схемою Гаусса). Отримані значення поправок потім додають до раніше знайдених значень невідомих.

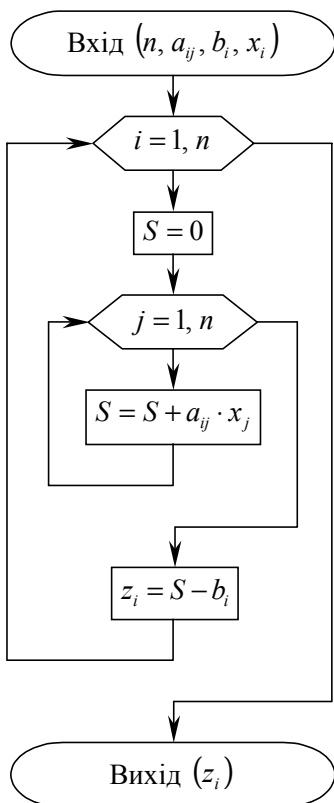


Рис. 3.2

4. ІНТЕРПОЛЯЦІЯ ФУНКЦІЙ. ІНТЕРПОЛЯЦІЙНИЙ ПОЛІНОМ ЛАГРАНЖА. ОБЧИСЛЕННЯ ЗНАЧЕННЯ ПОЛІНОМУ ЛАГРАНЖА НА ЕОМ

4.1. Способи завдання функцій

Для аналізу різноманітних об'єктів та явищ, з якими людина зустрічається у своїй практичній діяльності, доводиться використовувати апарат математичних функцій. Математичні функції необхідні для описування досліджуваних об'єктів чи явищ, виявлення в них форм зв'язку.

Зупинимось на таких формах зв'язку, для яких деяка величина y , що характеризує процес або явище, залежить від сукупності незв'язаних між собою величин $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, причому така залежність характеризується тим, що кожному набору $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ відповідає єдине значення величини y . Вказана однозначна відповідність називається *функціональною залежністю*, а сама змінна величина y – *функцією*, залежною від n незалежних аргументів $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Формально таку функціональну залежність прийнято записувати у вигляді $y = f(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$.

Якщо величина y є функцією однієї незалежної величини x , то говорять про функцію однієї змінної $y = f(x)$.

Наприклад, площа круга $S = \pi R^2$ є функцією незалежної змінної – радіусу кола R , тобто $S = f(R)$. Об'єм прямокутного паралелепіпеду $V = abh$ є вже функцією трьох змінних і т. п.

Зі шкільного курсу математичного аналізу відомі три способи завдання функціональної залежності: 1. аналітичний; 2. графічний; 3. табличний.

Найбільш загальним та зручним є *аналітичний спосіб завдання* функціональної залежності. Наприклад, зв'язок пройденого шляху та часу при рівноприскореному русі матеріальної точки виражається як $S = v_0 t + 0,5 a t^2$. Позитивною властивістю аналітичного способу завдання функції є можливість діставати значення y для будь-якого фіксованого аргументу x із

довільною точністю. До недоліків цього способу можна віднести те, що доводиться виконувати всю послідовність розрахунків, крім того, аналітичний спосіб завдання функції не є наочним.

Графічний спосіб завдання функціональної залежності є наочним і полягає у побудові графіку функції $y = f(x)$. Графіком даної функції $y = f(x)$ називається геометричне місце точок площини xOy , координати яких задовольняють рівнянню $y = f(x)$.

Табличний спосіб завдання функціональної залежності особливо поширений у фізиці, техніці, економіці й частіше за все виникає у результаті експерименту чи спостережень. Нехай, наприклад, у результаті спостереження встановлена кількість виробів, що випускається в оброблювальному цеху на поточний час робочого дня:

Поточний час (t_i)	0	1	1,5	2	2,5	3	4	5,5	6
Кількість виробів на t_i час (N)	0	51	77	109	123	160	198	278	302

Таким чином, даною таблицею зображена функція $N(t)$. Перевагою табличного способу завдання функції є те, що для кожного значення незалежної змінної, зафіксованого у таблиці, можна одразу без вимірів та розрахунків знайти відповідні значення функції. Недоліком табличного способу є те, що неможливо задати функцію на всій області її визначення, тобто завжди знайдуться такі значення незалежної змінної, яких немає в таблиці.

4.2. Математична постановка задачі інтерполяції

Як вже зазначалося в підрозд. 4.1, в економіці та техніці часто доводиться стикатися з необхідністю обчислювати значення функції $y = f(x)$ в точках x , значення яких відрізняються від значень аргументу, зафіксованих у таблиці. Крім того, в деяких випадках, не дивлячись на те, що аналітичний вираз функції $y = f(x)$ відомий, він є досить складним і незручним для математичних перетворень. Подібні задачі на практиці формалізуються як математичні *задачі інтерполяції*.

Отже, нехай відомі значення деякої функції $f(x)$ утворюють наступну таблицю. Для того щоб з'явилась можливість обчислювати будь-які значення цієї функції, застосовують спеціальний прийом: за початковою інформацією (за таблицею) будують наближену функцію $F(x)$, що близька до початкової функції $f(x)$ та аналітичний вираз якої придатний для обчислень і математичних перетворень:

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
y	y_0	y_1	y_2	...	y_n

$$f(x) = F(x). \tag{4.1}$$

Процес обчислення значень функції в точках x , які відрізняються від точок, зафіксованих в таблиці, називають *інтерполяцією функції $f(x)$* . Точки $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, розміщені в таблиці, прийнято називати *вузлами інтерполяції*.

Якщо аргумент x , для якого визначається наближене значення функції, належить відрізку $[x_0, x_n]$, то задача обчислення функції $F(x)$ називається *інтерполяцією у вузькому сенсі*. Якщо аргумент знаходиться за межами відрізка інтерполяції $[x_0, x_n]$, то задача визначення $F(x)$ називається *екстраполяцією*.

Класичний підхід до розв'язання задачі побудови наближеної функції $F(x)$ базується на вимозі строгої відповідності значень функцій $f(x)$ і $F(x)$ у вузлах інтерполяції, тобто

$$\left. \begin{aligned} F(x_0) &= y_0; F(x_1) = y_1; \\ F(x_2) &= y_2; \dots; F(x_n) = y_n. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

Геометрично задача інтерполяції для функції однієї змінної $y = f(x)$ полягає у побудові кривої $y = F(x)$, яка проходить через точки площини $M_0(x_0; y_0), M_1(x_1; y_1), M_2(x_2; y_2), \dots, M_n(x_n; y_n)$. Однак вже з рис. 4.1 інтуїтивно зрозуміло, що через дані точки можна провести нескінченну кількість кривих. Таким чином, задача знаходження функції $y = F(x)$ за скінченним числом точок функції $y = f(x)$ дуже невизначена. Іншими словами, критерію близькості початкової та наближеної функцій (4.2) недостатньо для побудови функції $y = F(x)$.

Дана задача стає однозначною, якщо для функції $f(x)$ задано $n + 1$ своїми значеннями, вибрати інтерполяційну функцію $F(x)$ конкретного вигляду, наприклад, поліном степеня $n - P_n(x)$.

Поліном $P_n(x)$, який задовольняє умовам (4.1), називається *інтерполяційним поліномом*, а відповідні формули – *інтерполяційними формулами*.

У випадку, коли $F(x)$ вибирається у класі степеневих функцій, інтерполяція називається *параболічною*.

Іноді доцільно використовувати інші види інтерполяції. Якщо інтерполяційна функція $f(x)$ є періодичною, то як клас інтерполяційних функцій $\{F(x)\}$ вибирають клас тригонометричних функцій. У деяких випадках як клас $\{F(x)\}$ доцільно вибирати раціональні функції.

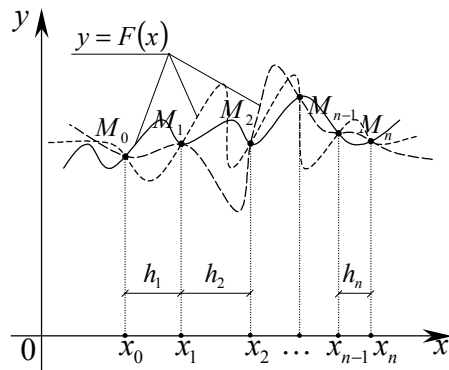


Рис. 4.1

**4.3. Інтерполяційний
поліном Лагранжа.
Обчислення
на ЕОМ значення
інтерполяційного
поліному в точці**

Найбільш загальною формулою параболічної інтерполяції є інтерполяційна формула Лагранжа. Задача параболічної інтерполяції в цьому випадку формулюється наступним чином. На відрізку $[x_0, x_n]$ у вузлах інтерполяції $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ задається функція $f(x)$ своїми $n + 1$ значеннями. Треба знайти функцію $F(x)$ у вигляді поліному степеня n таким чином, щоб у вузлах інтерполяції його значення співпадали зі значеннями заданої функції $f(x)$, тобто щоб

вони задовольняли рівняння (4.2).

Необхідно відразу зазначити, що така постановка задачі дозволяє знаходити інтерполяційну функцію навіть у тому випадку, коли вузли інтерполяції на відрізку $[x_0, x_n]$ довільно відстоять один від одного (вузли інтерполяції *нерівновіддалені*, тобто *крок інтерполяції* $h = x_{i+1} - x_i \neq \text{const}$).

Запишемо поліном $P_n(x)$ у вигляді:

$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n, \tag{4.3}$$

де $a_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ – шукані постійні коефіцієнти.

Визначимо невідомі коефіцієнти поліному a_i , підставивши (4.3) у (4.2):

$$\left. \begin{aligned} y_0 &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n, \\ y_1 &= a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n, \\ y_2 &= a_0 + a_1x_2 + a_2x_2^2 + \dots + a_nx_2^n, \\ &\dots\dots\dots, \\ y_n &= a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n, \end{aligned} \right\} \tag{4.4}$$

де $x_i, y_i (i = 0, 1, 2, \dots, n)$ – табличні значення аргументу та функції $f(x)$

Система (4.4) – це система лінійних алгебраїчних рівнянь $(n + 1)$ -го порядку. Невідомі a_i цієї системи можна дістати, наприклад, за формулами Крамера:

$$a_0 = \frac{\Delta_0}{\Delta}, a_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, a_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, a_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

СЛАР (4.4) визначена (має єдиний розв'язок), якщо визначник Δ матриці, побудованої з коефіцієнтів при невідомих системи (4.4)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix}, \quad (4.5)$$

відмінний від нуля.

Визначник матриці (4.5) відомий в алгебрі як *визначник Вандермонда*.

Він дорівнює добутку всіляких різниць вузлів x_1, x_2, \dots, x_n : $\Delta = \prod_{0 \leq i < j \leq n} (x_i - x_j)$.

Таким чином, $\Delta \neq 0$, оскільки всі вузли інтерполяції x_i різні.

Поліном (4.3) можна записати, не розв'язуючи систему (4.4), у вигляді

$$P_n(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} +$$

$$+ y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)\dots(x_2-x_n)} + \dots + y_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})},$$

або скорочено у вигляді

$$P_n(x) = \left. \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j} \right\} \quad (4.6)$$

Поліном (4.6) називається *інтерполяційним поліномом Лагранжа*, причому його значення співпадають зі значеннями функції $f(x)$ у вузлах інтерполяції x_i .

Наведемо без доведення теорему, що дозволяє оцінити похибку приближення поліному (4.6) до функції $f(x)$ у точках, які відрізняються від вузлів x_i .

Нехай функція $f(x)$ на відрізку $[x_0, x_n]$ має всі похідні до $(n+1)$ -го порядку включно, тобто $f(x) \in C^{n+1}[x_0, x_n]$. Тоді оцінку абсолютної похибки інтерполяційної формули Лагранжа можна виконати за формулою

$$|R_n(x)| = |f(x) - P_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |\omega_{n+1}(x)|, \quad (4.7)$$

де $\omega_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)$, $M_{n+1} = \max_{[x_0, x_n]} |f^{n+1}(x)|$.

Приклад 4.1. З'ясувати, з якою точністю можна обчислити значення $\sin(1,5)$ за допомогою інтерполяційної формули Лагранжа для функції $y = \sin x$, якщо взяти як вузли інтерполяції точки $x_0 = 0$, $x_1 = 0,5\pi$, $x_2 = \pi$.

Розв'язання. Дістанемо компоненти формули (4.7) при $n = 2$:

$$M_3 = \max_{[0, \pi]} |-\cos(x)| = 1; \quad \omega_3(1,5) = 1,5(1,5 - 0,5\pi)(1,5 - \pi); \quad 3! = 6.$$

Таким чином, верхня оцінка $|R_2(1,5)| \leq \frac{1}{6} |1,5(1,5 - 0,5\pi)(1,5 - \pi)| = 0,029$.

За формулою (4.6) знаходимо $\sin(1,5) = \frac{-6(1,5 - \pi)}{\pi^2} = 0,998$, а розрахунки на калькуляторі дають $\sin(1,5) = 0,997$. Отже, реальна абсолютна похибка $|R_2(1,5)| = |0,997 - 0,998| = 0,001$.

Приклад 4.2. Побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа для функції, заданої у вигляді таблиці, та дістати його значення в точці $x = 4$.

x	1	2	3	5
y	1	5	14	81

Розв'язання. Підставляємо вхідні дані у формулу (4.6) і отримуємо:

$$P_3(x) = 1 \frac{(x-2)(x-3)(x-5)}{(1-2)(1-3)(1-5)} + 5 \frac{(x-1)(x-3)(x-5)}{(2-1)(2-3)(2-5)} + 14 \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(3-1)(3-2)(3-5)} + 81 \frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(5-1)(5-2)(5-3)}.$$

Таким чином, $P_3(4) = 36,5$. Однак, не знаючи модуля четвертої похідної $|f^{IV}(x)|$ на інтервалі $[1,5]$, не можна оцінити похибку отриманого інтерполяційного значення.

Цей приклад показує, що для *формальної побудови інтерполяційного поліному* достатньо мати лише таблицю значень функції $f(x)$, а оцінка похибки потребує додаткової інформації про поведінку $f(x)$ та її похідних на інтервалі інтерполяції.

На рис. 4.2 зображена блок-схема алгоритму формальної інтерполяції функції в деякій точці z . Після реалізації даного алгоритму на ЕОМ результат розв'язання задачі прикладу 4.2 отриманий у вигляді

$$P_n(4,000) = 36,500.$$

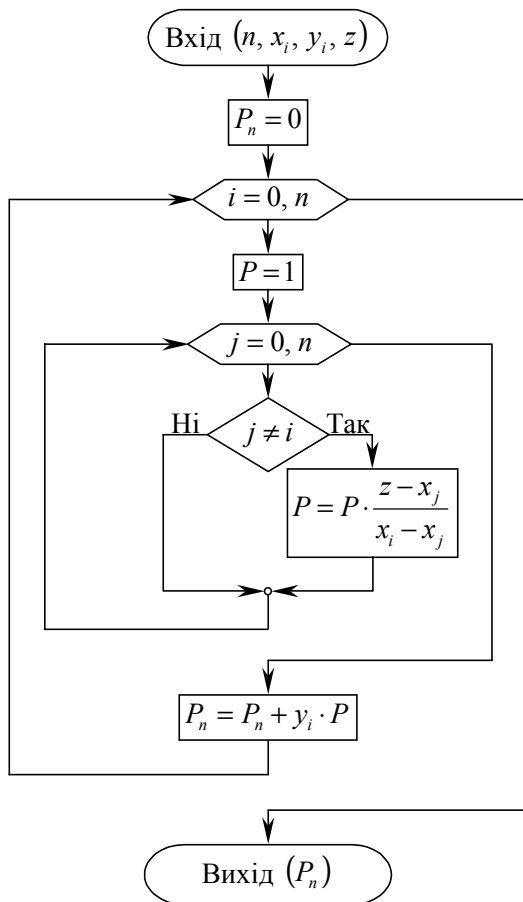


Рис. 4.2

5. ОБРОБКА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИХ ДАНИХ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕОМ

Аналіз різних процесів, які виникають у фізиці, техніці, економіці, призводить до необхідності виявлення найбільш суттєвих факторів, що впливають на досліджуваний процес. Крім того, виникає необхідність у виборі форм зв'язку між факторами та в оцінці параметрів отриманих рівнянь зв'язку.

Виявити різні фактори, які впливають на досліджуваний процес, у деяких випадках можливо тільки в результаті вимірів, тобто в процесі експерименту. З іншого боку, експеримент використовується і для перевірки адекватності ідеалізованої математичної моделі реальному процесу. Функціональні залежності, отримані в процесі експерименту у вигляді таблиць, прийнято називати *емпіричними*.

Аналітичну побудову емпіричних залежностей можна здійснити різними методами, серед яких найбільш поширеним є *метод найменших квадратів*.

5.1. Апроксимація функції методом найменших квадратів

Нехай у результаті вимірів у процесі експерименту отримана таблиця деякої функціональної залежності $y = f(x)$. Необхідно знайти формулу, що буде виражати цю залежність аналітично.

x	x_1	x_2	x_3	...	x_n
y	y_1	y_2	y_3	...	y_n

Можна, звичайно, застосувати метод інтерполяції, тобто побудувати інтерполяційний поліном Лагранжа $P_n(x)$, значення якого у вузлах $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ будуть точно співпадати з відповідними значеннями $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ із таблиці. Однак, точна відповідність значень у вузлах може і не означати того, що характери поведінки початкової та наближеної (інтерполяційної) функцій будуть співпадати. Більш того, точна

відповідність значень у вузлах виглядає зовсім невиправданою за умови, що значення функції $f(x)$ отримані в результаті вимірів, отже, є сумнівними.

Зараз поставимо задачу так, щоб із самого початку враховувався *характер* початкової функції. Необхідно знайти функцію *заданого вигляду*

$$y = F(x), \tag{5.1}$$

яка у вузлах $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ набуває значень $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_n$, якомога ближчих до табличних $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$.

Практично вигляд наближеної (*апроксимуючої*) функції (5.1) можна визначити наступним чином. Згідно з вхідною інформацією (за таблицею) будується *точковий графік* початкової функції $f(x)$, а потім проводиться плавна крива, яка за можливістю найкращим чином відображає характер розміщення точок (див. рис. 5.1). За отриманою в такий спосіб кривою встановлюється вигляд апроксимуючої функції (зазвичай з числа простих за виглядом аналітичних функцій).

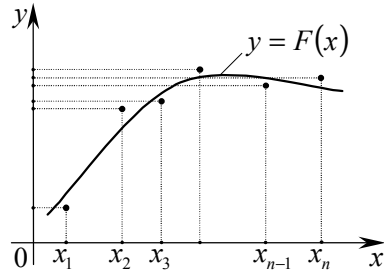


Рис. 5.1

Розглянемо один із поширених способів знаходження апроксимуючої функції $y = F(x)$.

Вимогу близькості табличних значень $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ та значень апроксимуючої функції $\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_n$ можна тлумачити таким чином. Сукупність значень функції з таблиці та сукупність значень функції $F(x)$ будемо розглядати як координати двох точок n -вимірного простору $M(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ та $\tilde{M}(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2, \tilde{y}_3, \dots, \tilde{y}_n)$. Апроксимуюча функція $F(x)$ заданого вигляду визначається з умови мінімуму відстані між цими точками:

$$\sqrt{(y_1 - \tilde{y}_1)^2 + (y_2 - \tilde{y}_2)^2 + (y_3 - \tilde{y}_3)^2 + \dots + (y_n - \tilde{y}_n)^2} = \min.$$

Значення цього кореня буде мінімальним, якщо підкореневий вираз наближатиметься до мінімуму. Скорочено це можна записати так:

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \tilde{y}_i)^2 = \min. \tag{5.2}$$

Отже, задача знаходження апроксимуючої функції тепер може бути сформульована наступним чином. Для функції $f(x)$, заданої у вигляді таблиці, знайти функцію $F(x)$ заданого вигляду таким чином, щоб сума квадратів (5.2) була найменшою. Ця задача носить назву апроксимації функції $f(x)$ *методом найменших квадратів*.

В залежності від характеру точкового графіку, використовують наступні апроксимуючі функції:

- | | |
|---------------------------------------|--|
| 1) $y = ax + b$ – лінійна; | 5) $y = \frac{1}{ax + b}$ – дробово-лінійна; |
| 2) $y = ax^2 + bx + c$ – параболічна; | 6) $y = a \ln x + b$ – логарифмічна; |
| 3) $y = ax^m$ – степенева; | 7) $y = a \frac{1}{x} + b$ – гіперболічна; |
| 4) $y = ae^{mx}$ – показникова; | 8) $y = \frac{x}{ax + b}$ – дробово-раціональна. |

Тут a, b, c, m – невідомі параметри. Коли вигляд функції $F(x)$ встановлено, задача апроксимації зводиться до визначення значень цих параметрів виходячи з формули (5.2).

5.2. Знаходження апроксимуючої функції у вигляді лінійної функції. Реалізація лінійної апроксимації на ЕОМ

Будемо шукати апроксимуючу функцію у вигляді $F(x, a, b) = ax + b$. Отже, $\tilde{y}_i = F(x_i, a, b)$, де $i = 1, 2, 3, \dots, n$, а рівняння (5.2) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b)]^2 = \Phi(a, b) = \min.$$

Для знаходження мінімуму функції $\Phi(a, b)$ скористаємося необхідною умовою існування екстремуму:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial \Phi(a, b)}{\partial b} &= 0, \end{aligned} \right\}$$

яка дозволяє записати

$$\left. \begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \left\{ [y_i - F(x_i, a, b)] \frac{\partial F(x_i, a, b)}{\partial a} \right\} &= 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n \left\{ [y_i - F(x_i, a, b)] \frac{\partial F(x_i, a, b)}{\partial b} \right\} &= 0. \end{aligned} \right\}$$

У нашому випадку $F(x_i, a, b) = ax_i + b$, $\frac{\partial F(x_i, a, b)}{\partial a} = x_i$, а

$\frac{\partial F(x_i, a, b)}{\partial b} = 1$, отже,

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i x_i - ax_i^2 - bx_i) &= 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i - b) &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Після винесення за знак суми членів, які не залежать від індексу підсумовування i , отримаємо

$$\left. \begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i + bn &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Система (5.3) – СЛАР другого порядку відносно невідомих коефіцієнтів a та b . Якщо позначити

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n x_i; S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2; \\ S_{10} &= \sum_{i=1}^n y_i; S_{11} = \sum_{i=1}^n y_i x_i, \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

то легко дістати аналітичний розв'язок (5.3) у вигляді

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{nS_{11} - S_1 S_{10}}{nS_2 - S_1^2}; b = \frac{S_{10} - aS_1}{n}. \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

Приклад 5.1. Для функції, заданої у вигляді таблиці, знайти апроксиму-

x	1	2	3	5
y	1,1	1,9	3,2	5

ючу функцію вигляду $F(x) = ax + b$.

Розв'язання. За формулами (5.4) знаходимо: $S_1 = 1 + 2 + 3 + 5 = 11$, $S_2 = 1 + 4 + 9 + 25 = 39$, $S_{10} = 1,1 + 1,9 + 3,2 + 5 = 11,2$, $S_{11} = 1,1 + 3,8 + 9,6 + 25 = 39,5$.

За формулами (5.5) знаходимо:

$$a = \frac{4 \cdot 39,5 - 11 \cdot 11,2}{4 \cdot 39 - 121} = 0,994, \quad b = \frac{11,2 - 0,994 \cdot 11}{4} = 0,066.$$

Таким чином, $F(x) = 0,994x + 0,066$.

Зрозуміло, що значення знайденої у прикладі 5.1 функції $F(x)$ у вузлах x_i будуть відрізнятись від відповідних табличних значень y_i . Значення різниць $\epsilon_i = y_i - F(x_i)$ називаються *відхиленнями* виміряних значень $f(x)$ від обчислених значень $F(x)$. Для знайденої емпіричної формули згідно з початковою

таблицею можна дістати суму квадратів відхилень $\sigma = \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2$, а з двох різних

наближень однієї й тієї ж табличної функції кращим слід вважати те, для якого σ має найменше значення.

На рис. 5.2 зображена блок-схема алгоритму обчислення коефіцієнтів a та b для лінійної апроксимації функції, заданої у вигляді таблиці. Зазначимо, що наведений алгоритм у певній мірі є універсальним, оскільки знаходження апроксимуючої функції у вигляді якоїсь елементарної функції з двома параметрами з підрозд. 5.1 іноді може бути зведено до знаходження параметрів лінійної функції. Покажемо, яким чином це можна зробити.

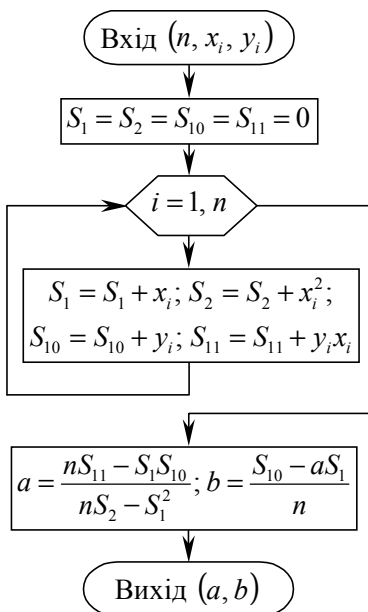


Рис. 5.2

мо, що наведений алгоритм у певній мірі є універсальним, оскільки знаходження апроксимуючої функції у вигляді якоїсь елементарної функції з двома параметрами з підрозд. 5.1 іноді може бути зведено до знаходження параметрів лінійної функції. Покажемо, яким чином це можна зробити.

Степенева функція $F(x) = ax^m$

Якщо припустити, що в початковій таблиці значення x_i та y_i додатні, можна злогарифмувати рівняння $F(x) = ax^m$ за умови $a > 0$:

$$\ln F(x) = m \ln x + \ln a.$$

За зроблених вище припущень, для знаходження наближеної функції у вигляді степеневій, алгоритм лінійної апроксимації використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, \ln x_i, \ln y_i$;
2. на виході отримуємо a та b ;
3. у вираз для $F(x)$ підставляємо $m = a, a = e^b$.

Показникова функція $F(x) = ae^{mx}$

Злогарифмуємо $F(x) = ae^{mx}$ при $a > 0$:

$$\ln F(x) = mx + \ln a.$$

Таким чином, для знаходження наближеної функції у вигляді показникової при $y_i > 0$ алгоритм лінійної апроксимації використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, x_i, \ln y_i$;
2. на виході отримуємо a та b ;
3. у вираз для $F(x)$ підставляємо $m = a, a = e^b$.

Дробово-лінійна функція $F(x) = \frac{1}{ax + b}$

Запишемо функцію $F(x)$ у вигляді

$$\frac{1}{F(x)} = ax + b.$$

Таким чином, для знаходження наближеної функції у вигляді дробово-лінійної при $y_i \neq 0$ алгоритм на рис. 5.2 використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, x_i, 1/y_i$;
2. на виході отримуємо a та b , які потім підставляємо у вираз $F(x) = 1/(ax + b)$.

Логарифмічна функція $F(x) = a \ln x + b$

Якщо припустити, що в початковій таблиці значення $x_i \geq 0$, для знаходження наближеної функції у вигляді логарифмічної, алгоритм лінійної апроксимації використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, \ln x_i, y_i$;
2. на виході отримуємо a та b , які потім підставляємо у вираз $F(x) = a \ln x + b$.

Гіперболічна функція $F(x) = a \frac{1}{x} + b$

Для знаходження наближеної функції у вигляді гіперболи алгоритм лінійної апроксимації при $x_i \neq 0$ використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, 1/x_i, y_i$;
2. на виході отримуємо a та b , які потім підставляємо у вираз для $F(x)$.

Дробово-раціональна функція $F(x) = \frac{x}{ax + b}$

Запишемо функцію $F(x)$ у вигляді

$$\frac{1}{F(x)} = b \frac{1}{x} + a.$$

Таким чином, для знаходження наближеної функції у вигляді дробово-раціональної, при $x_i, y_i \neq 0$ алгоритм на рис. 5.2 використовується так:

1. на вхід алгоритму подаються $n, 1/x_i, 1/y_i$;
2. на виході отримуємо a та b ;
3. у вираз для $F(x)$ підставляємо $b = a, a = b$.

Приклад 5.2. Для функції, заданої табличним способом, знайти найкращу апроксимуючу функцію серед елементарних функцій із двома параметрами.

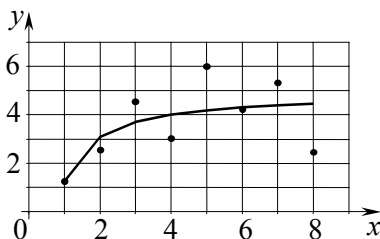
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1,25	2,56	4,56	3,04	6,01	4,23	5,34	2,45

Побудувати точковий графік початкової функції та графік вибраної апроксимуючої функції.

Розв'язання. Після реалізації алгоритму лінійної апроксимації у вигляді підпрограми та відповідних викликах такої підпрограми в основній програмі були отримані наступні результати:

Лінійна	$a = 0,2890$	$b = 2,3793$	$\sigma = 14,834161905$;
Степенева	$m = 0,4992$	$a = 1,7128$	$\sigma = 14,062208574$;
Показникова	$m = 0,1053$	$a = 2,0672$	$\sigma = 17,063358711$;
Дробово-лінійна	$a = -0,0461$	$b = 0,5495$	$\sigma = 24,251111878$;
Логарифмічна	$a = 1,3603$	$b = 1,8768$	$\sigma = 11,934597612$;
Гіперболічна	$a = -3,6677$	$b = 4,9261$	$\sigma = 10,216915042$;
Дробово-раціональна	$a = 0,1334$	$b = 0,6145$	$\sigma = 13,298537713$.

Оскільки мінімальне значення σ відповідає гіперболічній функції, як апроксимуючу вибираємо функцію $F(x) = -3,6677/x + 4,9261$.



**5.3. Знаходження
апроксимуючої функції
у вигляді квадратного
тричлену. Реалізація
квадратичної
апроксимації на ЕОМ**

Якщо шукати апроксимуючу функцію у вигляді функції з трьома параметрами $F(x, a, b, c) = ax^2 + bx + c$, то $\tilde{y}_i = F(x_i, a, b, c)$, а рівняння (5.2) запишеться у вигляді

$$\sum_{i=1}^n [y_i - F(x_i, a, b, c)]^2 = \Phi(a, b, c) = \min.$$

Необхідна умова існування екстремуму для $\Phi(a, b, c)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial b} = 0, \\ \frac{\partial \Phi(a, b, c)}{\partial c} = 0, \end{aligned} \right\}$$

дозволяє записати:

$$\left. \begin{aligned} -2 \sum_{i=1}^n \left\{ [y_i - F(x_i, a, b, c)] \frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial a} \right\} = 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n \left\{ [y_i - F(x_i, a, b, c)] \frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial b} \right\} = 0, \\ -2 \sum_{i=1}^n \left\{ [y_i - F(x_i, a, b, c)] \frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial c} \right\} = 0. \end{aligned} \right\}$$

В нашому випадку $F(x_i, a, b, c) = ax_i^2 + bx_i + c$, $\frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial a} = x_i^2$,

$$\frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial b} = x_i, \quad \frac{\partial F(x_i, a, b, c)}{\partial c} = 1, \quad \text{отже,}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (y_i x_i^2 - ax_i^4 - bx_i^3 - cx_i^2) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i x_i - ax_i^3 - bx_i^2 - cx_i) = 0, \\ \sum_{i=1}^n (y_i - ax_i^2 - bx_i - c) = 0. \end{aligned} \right\}$$

Після винесення за знак суми членів, які не залежать від індексу підсумовування i , отримаємо

$$\left. \begin{aligned} a \sum_{i=1}^n x_i^4 + b \sum_{i=1}^n x_i^3 + c \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^3 + b \sum_{i=1}^n x_i^2 + c \sum_{i=1}^n x_i &= \sum_{i=1}^n y_i x_i, \\ a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i + cn &= \sum_{i=1}^n y_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Система (5.6) – СЛАР третього порядку відносно невідомих коефіцієнтів a , b та c . Якщо позначити

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sum_{i=1}^n x_i; S_2 = \sum_{i=1}^n x_i^2; S_3 = \sum_{i=1}^n x_i^3; S_4 = \sum_{i=1}^n x_i^4; \\ S_{10} &= \sum_{i=1}^n y_i; S_{11} = \sum_{i=1}^n y_i x_i; S_{12} = \sum_{i=1}^n y_i x_i^2, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

то можна отримати аналітичний розв'язок (5.6) за формулами Крамера у вигляді

$$\left. \begin{aligned} \Delta &= S_4(S_2n - S_1^2) - S_3(S_3n - S_1S_2) + S_2(S_1S_3 - S_2^2); \\ \Delta_1 &= S_{12}(S_2n - S_1^2) - S_3(S_{11}n - S_1S_{10}) + S_2(S_1S_{11} - S_2S_{10}); \\ \Delta_2 &= S_4(S_{11}n - S_1S_{10}) - S_{12}(S_3n - S_1S_2) + S_2(S_3S_{10} - S_2S_{11}); \\ \Delta_3 &= S_4(S_2S_{10} - S_1S_{11}) - S_3(S_3S_{10} - S_2S_{11}) + S_{12}(S_1S_3 - S_2^2); \\ a &= \frac{\Delta_1}{\Delta}; b = \frac{\Delta_2}{\Delta}; c = \frac{\Delta_3}{\Delta}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Алгоритм обчислення коефіцієнтів a , b та c за формулами (5.8) з урахуванням (5.7) зображено на рис. 5.3.

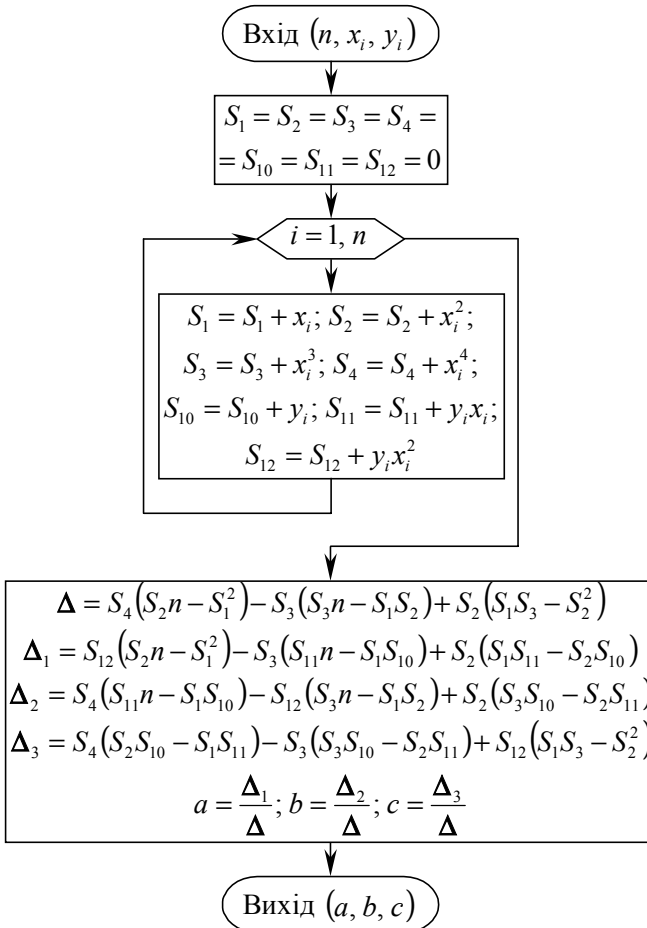


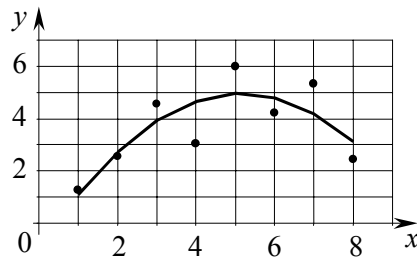
Рис. 5.3

Приклад 5.3. Для функції прикладу 5.2, заданої у вигляді таблиці, знайти апроксимуючу функцію вигляду $F(x) = ax^2 + bx + c$. Побудувати точковий графік початкової функції та графік апроксимуючої функції.

Розв'язання. Після реалізації алгоритму квадратичної апроксимації на ЕОМ були отримані наступні результати:

$$F(x) = -0,2251x^2 + 2,3151x - 0,9975;$$

$$\sigma = 6,3201595238.$$



6. НАБЛИЖЕНЕ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ. РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ КОШІ ЗА ДОПОМОГОЮ ЕОМ

6.1. Загальні поняття про диференціальні рівняння. Задача Коші

Для опису різноманітних фізичних, технічних або економічних задач використовуються математичні моделі. Більшість математичних моделей зображують диференціальні рівняння чи системи таких рівнянь. Так, математичною моделлю коливання матеріальної точки є звичайні диференціальні рівняння. Однак якщо описувати коливання не точки, а тіла, то математичною моделлю цього фізичного процесу будуть вже диференціальні рівняння з частинними похідними.

Рівняння, в якому невідома функція знаходиться під знаком похідної чи диференціала, називається *диференціальним рівнянням*.

Якщо невідома функція, що входить у диференціальне рівняння, залежить тільки від однієї незалежної змінної, то таке диференціальне рівняння називається *звичайним*. Наприклад, звичайними диференціальними рівняннями є

$$t^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 2y(t) \quad \text{або} \quad y''(x) - 2y'(x) + x^2 = 1.$$

Якщо ж невідома функція, яка входить у диференціальне рівняння, є функцією двох або більше незалежних змінних, то таке диференціальне рівняння називається *рівнянням із частинними похідними*. Прикладами диференціальних рівнянь із частинними похідними є

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \quad \text{або}$$

$$D_1 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + D_2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = p(x, y).$$

Порядок диференціального рівняння визначається за найвищим порядком похідної (чи диференціала), що входить у рівняння. Так, наприклад,

$$\text{рівняння } t^2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} = 2y(t), \quad y''(x) - 2y'(x) + x^2 = 1 \quad \text{та} \quad \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}$$

є рівняннями другого порядку, а рівняння $D_1 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2D_3 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} +$

$$+ D_2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} = p(x, y) \quad \text{– четвертого порядку.}$$

У даному розділі розглядаються тільки звичайні диференціальні рівняння першого порядку, які містять у загальному випадку незалежну змінну x , невідому функцію $y(x)$ та її похідну (або диференціал) першого порядку $y'(x)$

(або $\frac{dy(x)}{dx}$):

$$y' = f(x, y). \tag{6.1}$$

Розв'язком чи інтегралом диференціального рівняння (6.1) називається будь-яка диференційована функція $y = \varphi(x)$, що задовольняє даному рівнянню, тобто така, після підстановки якої в рівняння (6.1) воно перетворюється в тотожність. Графік функції $y = \varphi(x)$ називається інтегральною кривою цього рівняння.

Розв'язок диференціального рівняння (6.1), який містить одну незалежну довільну сталу C , називається загальним розв'язком або загальним інтегралом цього рівняння. Загальний розв'язок з геометричної точки зору зображує сукупність інтегральних кривих (див. рис. 6.1).

Частинний розв'язок диференціального рівняння (6.1) можна отримати із загального при певному значенні сталої C .

Значення сталої C можна визначити за допомогою так званих початкових умов. Задача з початковими умовами називається задачею Коші і ставиться таким чином: знайти розв'язок $y = \varphi(x)$

рівняння (6.1), який задовольняє додатковій умові – при $x = x_0, y = \varphi(x_0) = y_0$. Геометрично задача Коші для рівняння (6.1) полягає в тому, що з усієї множини інтегральних кривих (рис. 6.1) потрібно знайти ту, яка проходить через точку M_0 з координатами $x = x_0, y = y_0$.

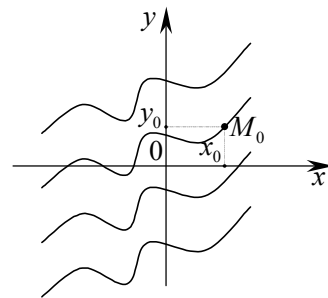


Рис. 6.1

Приклад 6.1. Розв'язати задачу Коші:

$$\left. \begin{array}{l} y'(x) = x; \\ x_0 = 0; y_0 = 1. \end{array} \right\}$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок: $y' = x \Rightarrow \frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = x dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int dy = \int x dx \Rightarrow y = 0,5x^2 + C$. Якщо тепер у загальний розв'язок підставити початкові дані, то отримаємо $C = 1$. Отже, частинний розв'язок, який задовольняє початковій умові, зображує функцію $y = 0,5x^2 + 1$. Геометрично це означає, що з усієї множини парабол, які зображують загальний розв'язок, вибираємо одну єдину, що проходить через точку $M_0(0,1)$.

Методами точного інтегрування можна розв'язати порівняно невелику частину диференціальних рівнянь, які зустрічаються на практиці. Тому доводиться використовувати наближені методи, що, в залежності від форми зображення розв'язку, можна поділити на дві групи:

1. *аналітичні методи* – дають наближений розв'язок диференціального рівняння у вигляді аналітичного виразу;

2. *чисельні методи* – дають наближений розв'язок у вигляді таблиці.

У даному розділі розглянемо два наближених чисельних методи розв'язання диференціальних рівнянь вигляду (6.1) – це методи Ейлера і Рунге–Кутта.

6.2. Розв'язання задачі Коші методом Ейлера. Реалізація методу Ейлера на ЕОМ

Метод Ейлера є порівняно грубим чисельним методом розв'язання диференціальних рівнянь і застосовується в основному для орієнтовних розрахунків. Однак ідеї, покладені в основу даного методу, виявилися базовими для ряду інших, більш точних методів.

Отже, нехай потрібно розв'язати задачу Коші на деякому відрізку $[a, b]$:

$$\left. \begin{array}{l} y' = f(x, y); \\ x = x_0; y(x_0) = y_0. \end{array} \right\} \quad (6.2)$$

Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин (рис. 6.2) і одержимо послідовність точок $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$, тобто $x_i = a + ih$, де $i = 0, 1, 2, \dots, n$, а $h = (b - a)/n$ – крок інтегрування.

ЧАСТИНА ДРУГА

Виберемо деякий k -й інтервал $[x_k, x_{k+1}]$ і зінтегруємо на ньому диференціальне рівняння (6.2):

$$\begin{aligned} \int_{x_k}^{x_{k+1}} y'(x) dx &= \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx \Rightarrow \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx = \\ &= y(x) \Big|_{x_k}^{x_{k+1}} = y(x_{k+1}) - y(x_k). \end{aligned}$$

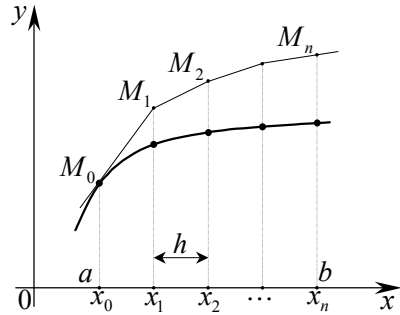


Рис. 6.2

Позначаючи $y(x_k) = y_k$ та $y(x_{k+1}) = y_{k+1}$ дістанемо

$$y_{k+1} = y_k + \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x, y) dx. \quad (6.3)$$

Коли припустити, що в інтегралі рівняння (6.3) підінтегральна функція $f(x, y)$ на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ не змінюється і дорівнює початковому значенню в точці x_k , тобто $f(x, y) = \text{const} = f(x_k, y_k)$, то дістанемо

$$y_{k+1} = y_k + f(x_k, y_k) \int_{x_k}^{x_{k+1}} dx = y_k + f(x_k, y_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Оскільки $x_{k+1} - x_k = h$, а згідно з (6.2) $f(x_k, y_k) = y'_k$, остаточно отримаємо

$$y_{k+1} = y_k + hy'_k. \quad (6.4)$$

Рекурсивна формула (6.4) називається *формулою методу Ейлера*, яка з урахуванням початкової умови дозволяє побудувати таблицю наближених значень шуканої функції $y = \varphi(x)$ на відрізку $[a, b]$ з кроком h .

Якщо формулу (6.4) записати у вигляді $y_{k+1} - y_k = y'_k(x_{k+1} - x_k)$, то можна побачити, що на відрізку $[x_k, x_{k+1}]$ інтегральна крива приблизно замінюється прямолінійним відрізком, який виходить із точки $M_k(x_k, y_k)$ з кутовим коефіцієнтом $y'_k = f(x_k, y_k)$. Таким чином, замість істинної інтегральної кривої $y = \varphi(x)$ ми одержуємо ламану лінію з вершинами в точках $M_0(x_0, y_0)$, $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, ..., $M_n(x_n, y_n)$. Перша ланка цієї ламаної дотикається істинної інтегральної кривої в точці M_0 (див. рис. 6.2), а з кожним наступним кроком похибка систематично зростає.

Приклад 6.2. Методом Ейлера розв'язати задачу Коші $\left. \begin{array}{l} y' = xy; \\ x_0 = 0; y_0 = 1 \end{array} \right\}$ на відрізка $[0,1]$ з кроком $h = 0,25$. Оцінити максимальну похибку.

Розв'язання. Подане диференціальне рівняння має точний аналітичний розв'язок:

$$y' = xy \Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int x dx \Rightarrow \ln|y| = 0,5x^2 + C.$$

Якщо тепер у загальний розв'язок підставити початкові дані, то одержимо $\ln 1 = C \Rightarrow C = 0$. Отже, частинний розв'язок, що задовольняє початковій умові, має вигляд: $y = e^{0,5x^2}$.

Тепер обчислимо за формулою Ейлера наближені значення частинного розв'язку і порівняємо ці значення з точними. Розрахунок зручно вести за допомогою наступної таблиці:

Наближений розв'язок				Точний розв'язок		Похибка
k	x_k	y_k	$hy'_k = hx_k y_k$	x_k	$y_k = e^{0,5x_k^2}$	$\delta, \%$
0	0	1	0	0	1	0
		$y_{k+1} = y_k + hy'_k$				
1	0,25	1	0,0625	0,25	1,0317	3,073
2	0,5	1,0625	0,1328	0,5	1,1331	6,231
3	0,75	1,1953	0,2241	0,75	1,3248	9,775
4	1	1,4194		1	1,6487	13,908

Для оцінки похибки методу Ейлера існує аналітична формула, яку можна знайти в літературі, присвяченій чисельним методам. Однак вона має в основному теоретичне значення, тому тут не наводиться. Для досягнення припустимої похибки ϵ , на практиці, як правило, застосовують метод подвійного перерахунку (застосування його к чисельному інтегруванню викладено в підрозд. 1.5). Розрахунок у рамках методу Ейлера ведеться двічі: при поділі відрізка $[a, b]$ спочатку на n частин, а потім на $2n$ частин. Обчислення припиняються, коли виконується умова $|y(x_{2n}) - y(x_n)| \leq \epsilon$. Значимо, що оскільки подвійний перерахунок ведеться без реальної оцінки похибки, то після виконання умови $|y(x_{2n}) - y(x_n)| \leq \epsilon$ дістається деяке асимптотичне значення² $\phi(b)$, точність якого невідома.

²Під асимптотичним тут слід розуміти таке значення інтегралу диференційного рівняння в точці b , яке (при малому значенні ϵ), не можна суттєво уточнити за допомогою наступного збільшення кількості n розбивок відрізка інтегрування на рівні частини.

Алгоритм розв'язання задачі Коші (6.2) на відрізку $[x_0, b]$ з кроком h у рамках методу Ейлера наведено на рис. 6.3. Метод подвійного перерахунку на базі даного алгоритму можна реалізувати згідно з блок-схемою, зображеною на рис. 6.4.

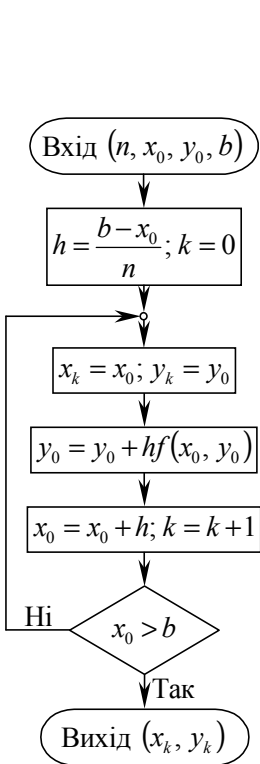


Рис. 6.3

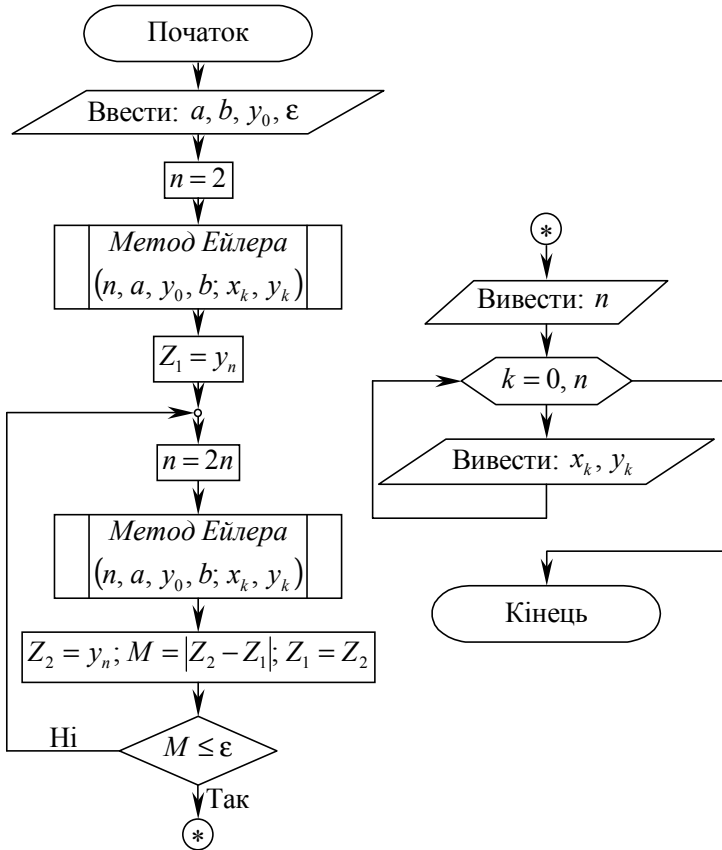


Рис. 6.4

Приклад 6.3. Методом Ейлера розв'язати задачу Коші з прикладу 4.2 із заданою асимптотичною точністю $\epsilon = 10^{-2}$.

Розв'язання. Після реалізації алгоритму подвійного перерахунку, зображеного на рис. 6.4, одержимо таблицю для шуканої функції.

k	x_k	y_k
0	0,00	1,00
...
32	0,25	1,03
...
64	0,50	1,13
...
96	0,75	1,32
...
128	1,00	1,64

6.3. Розв'язання задачі Коші методом Рунге–Кутта. Реалізація методу Рунге–Кутта на ЕОМ

Метод Рунге–Кутта є одним із методів підвищеної точності та має багато спільного з методом Ейлера.

Нехай на відрізку $[a, b]$ потрібно знайти чисельний розв'язок задачі Коші (6.2). Розіб'ємо відрізок $[a, b]$ на n рівних частин точками $x_i = a + ih$, де $i = 0, 1, 2, \dots, n$, $h = (b - a)/n$.

У методі Рунге–Кутта, як і в методі Ейлера, значення шуканої функції $y = \varphi(x)$ послідовно обчислюються за формулою (6.4).

Якщо позначити $hy'_k = y_{k+1} - y_k = \Delta y_k$, то формула (6.4) запишеться у вигляді

$$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k. \tag{6.5}$$

Розкладемо тепер шукану функцію $y(x)$ у ряд Тейлора в околі точки з координатою x_k :

$$y(x) = y(x_k) + \frac{y'(x_k)}{1!}(x - x_k) + \frac{y''(x_k)}{2!}(x - x_k)^2 + \frac{y'''(x_k)}{3!}(x - x_k)^3 + \frac{y^{IV}(x_k)}{4!}(x - x_k)^4 + \dots + \frac{y^n(x_k)}{n!}(x - x_k)^n + \frac{y^{n+1}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_k)^{n+1}, \tag{6.6}$$

де x – будь-яке значення аргументу з околу точки x_k , причому $x \neq x_k$, а ξ – точка, розташована між x та x_k .

Якщо в околі точки x_k взяти точку x_{k+1} і, з огляду на те, що $x_{k+1} - x_k = h$, обмежитися членами ряду (6.6) до h^4 включно, дістанемо

$$\Delta y_k = y'_k h + \frac{h^2}{2} y''_k + \frac{h^3}{6} y'''_k + \frac{h^4}{24} y^{IV}_k, \tag{6.7}$$

де похідні $y'_k, y''_k, y'''_k, y^{IV}_k$ визначаються послідовним диференціюванням рівняння $y'_k = f(x_k, y_k)$.

Оцінка похибки (6.7) впливає з формули залишкового члена відрізка

ряду Тейлора (6.6): $\max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |\varphi(x) - y(x)| \leq \frac{h^5}{120} \max_{x_k \leq x \leq x_{k+1}} |y^{(5)}(x)|$. Таким чи-

ном, похибка методу Рунге–Кутта на кожному кроці інтегрування це величина порядку $h^5 - O(h^5)$.

Легко помітити, що коли обмежитися членами ряду (6.6) до h включно, то дістанемо формулу методу Ейлера (6.4). Зрозуміло, що похибка методу Ейлера на кожному кроці інтегрування є величина $O(h^2)$.

Замість безпосередніх обчислень за формулою (6.7) у методі Рунге–Кутта вибираються чотири числа:

$$\left. \begin{aligned} K_1^k &= hf(x_k, y_k); K_2^k = hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_1^k}{2}\right); \\ K_3^k &= hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{K_2^k}{2}\right); K_4^k = hf(x_k + h, y_k + K_3^k). \end{aligned} \right\} \quad (6.8)$$

Можна довести: якщо числам $K_1^k, K_2^k, K_3^k, K_4^k$ надати відповідну вагу $\frac{1}{6}, \frac{1}{3},$

$\frac{1}{3},$ і $\frac{1}{6},$ то середньозважене цих чисел, тобто дорівнює значенню $\Delta y_k,$ яке обчислюється за формулою (6.7).

Таким чином, обчислення таблиці наближених значень розв'язку задачі Коші у рамках методу Рунге–Кутта здійснюється з урахуванням (6.8) за рекурсивною формулою:

$$y_{k+1} = y_k + \frac{1}{6}(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k). \quad (6.9)$$

Відзначимо, що метод Рунге–Кутта на всьому відрізку інтегрування $[a, b]$ має точність $O(h^4).$ Оцінити реальну похибку цього методу достатньо важко, тому (так само як і в методі Ейлера) застосовують метод подвійного перерахунку для досягнення відповідної точності. Розрахунок у рамках методу Рунге–Кутта ведеться двічі: при поділі відрізка $[a, b]$ спочатку на n частин, а потім на $2n$ частин. Обчислення припиняються тоді, коли виконується умова $|y(x_{2n}) - y(x_n)| \leq 15\epsilon.$

Приклад 6.3. Методом Рунге–Кутта розв'язати задачу Коші з прикладу 6.2.

Розв'язання. Обчислення за формулою (6.9) з урахуванням (6.8) зобразимо у вигляді наступної таблиці:

k	x_k	y_k	K_1^k	K_2^k	K_3^k	K_4^k	$\frac{1}{6}\left(K_1^k + 2K_2^k + 2K_3^k + K_4^k\right)$
0	0,0000	1	0	0,0313	0,0317	0,0645	0,0317
		$y_{k+1} = y_k + \Delta y_k$					
1	0,2500	1,0317	0,0645	0,0997	0,1014	0,1416	0,1014
2	0,5000	1,1331	0,1416	0,1881	0,1918	0,2484	0,1916
3	0,7500	1,3248	0,2484	0,3170	0,3245	0,4123	0,3239
4	1,0000	1,6487	0,4122	0,5217	0,5371	0,6831	

Алгоритм розв'язання задачі Коші (6.2) на відрізку $[x_0, b]$ з кроком h у рамках методу Рунге–Кутта наведено на рис. 6.5. Метод подвійного пере-рахунку на базі даного алгоритму реалізується згідно з блок-схемою, зобра-женою на рис. 6.6.

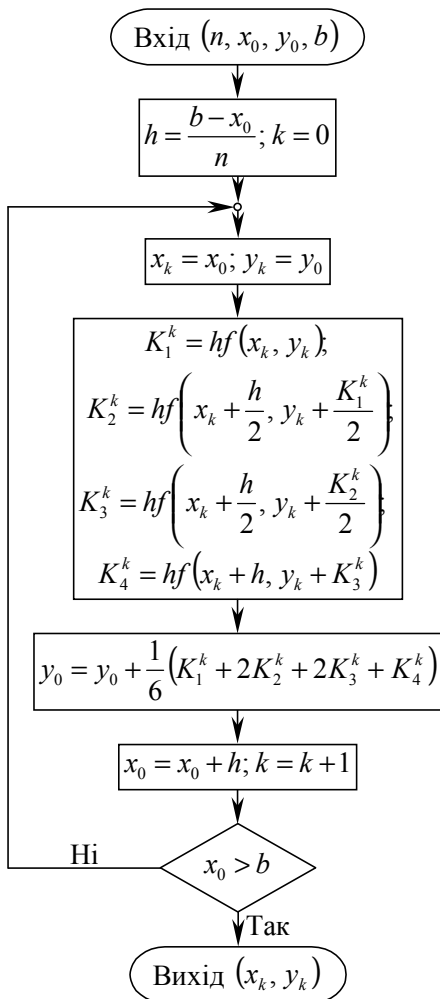


Рис. 6.5

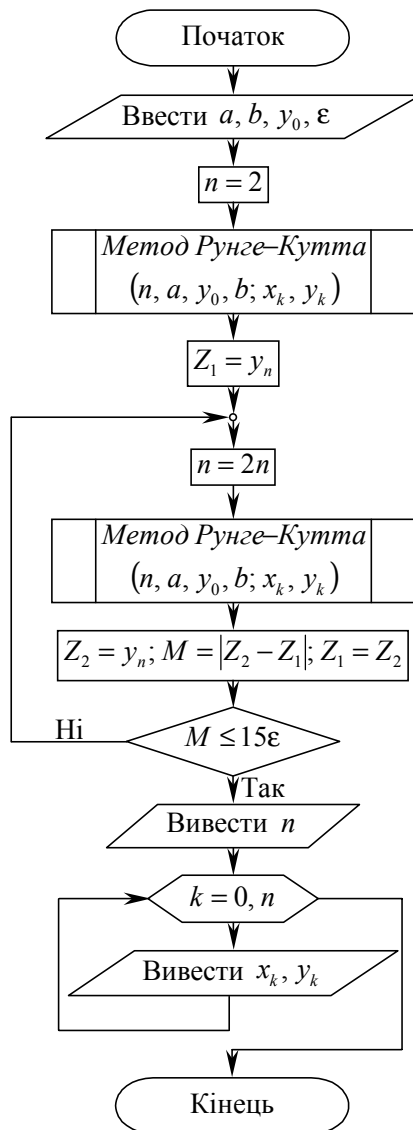


Рис. 6.6

рис. 6.6, одержимо наступну таблицю розв'язку задачі Коші з прикладу 4.2 із точністю $\epsilon = 10^{-5}$:

k	x_k	y_k
0	0,00000	1,00000
1	0,12500	1,00784
2	0,25000	1,03174
3	0,37500	1,07284
4	0,50000	1,13315
5	0,62500	1,21569
6	0,75000	1,32478
7	0,87500	1,46640
8	1,00000	1,64872

ПИТАННЯ ДЛЯ САМОКОНТРОЛЮ ПО РОЗДІЛУ ДРУГОМУ

1. Назвіть задачі, які потребують обчислення значення визначеного інтегралу. Запишіть формулу Ньютона–Лейбніца для точного інтегрування.
2. Чому доводиться використовувати методи наближеного інтегрування?
3. Який геометричний зміст визначеного інтегралу?
4. Виведіть формулу методу лівих прямокутників.
5. Наведіть алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу за методом лівих прямокутників.
6. Виведіть формулу методу правих прямокутників.
7. Наведіть алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу за методом правих прямокутників.
8. Виведіть формулу методу трапецій. Як оцінюється похибка інтегрування в рамках методу трапецій?
9. Наведіть алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу за методом трапецій.
10. Завдяки яким обставинам будується узагальнений алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу методами лівих прямокутників, правих прямокутників і трапецій?
11. Виведіть формулу методу Сімпсона. Як оцінюється похибка інтегрування в рамках методу Сімпсона?
12. Наведіть алгоритм обчислення значення визначеного інтегралу за методом Сімпсона.
13. Який із відомих вам методів наближеного інтегрування має найбільшу точність і чому?
14. Якими способами можна обчислити значення визначеного інтегралу з заданим наперед ступенем точності?

15. Наведіть алгоритм методу подвійного перерахунку для обчислення значення визначеного інтегралу із заданою точністю.

16. Які лінійні та нелінійні рівняння Ви знаєте? Чим лінійне алгебраїчне рівняння відрізняється від нелінійного?

17. Чому виникає необхідність використовувати наближені методи для знаходження коренів нелінійного рівняння?

18. Охарактеризуйте етапи наближеного розв'язання нелінійних рівнянь?

19. Які властивості має відрізок ізоляції кореня? Якими способами можна його знайти?

20. Якими способами можна здійснити графічне відокремлення кореня нелінійного рівняння?

21. На базі якого класичного алгоритму здійснюється обчислювальне відокремлення коренів? Зобразіть блок-схему алгоритму обчислювального відокремлення коренів.

22. Дайте математичний опис методу половинного ділення. Як оцінюється похибка кореня нелінійного рівняння, уточненого в рамках цього методу?

23. Наведіть алгоритм методу половинного ділення і дайте йому геометричну інтерпретацію.

24. Запишіть розрахункові формули методу простої ітерації для уточнення кореня нелінійного рівняння. Охарактеризуйте збіжні та розбіжні ітераційні процеси уточнення кореня.

25. Наведіть алгоритм методу ітерацій для розв'язання нелінійного рівняння з заданим ступенем точності.

26. Виведіть розрахункові формули методу хорд. Як оцінюється похибка кореня нелінійного рівняння, уточненого в рамках цього методу?

27. Наведіть алгоритм методу хорд для розв'язання нелінійного рівняння з заданим ступенем точності.

28. Виведіть розрахункові формули методу дотичних. Як оцінюється похибка кореня нелінійного рівняння, уточненого в рамках цього методу?

29. Наведіть алгоритм методу дотичних для розв'язання нелінійного рівняння з заданим ступенем точності.

30. На базі алгоритмів методу хорд і дотичних самостійно розробіть алгоритм комбінованого методу хорд і дотичних враховуючи, що похибка зазначеного методу визначається аналогічно похибці методу половинного ділення.

31. Назвіть задачі, які призводять до необхідності розв'язання СЛАР. Чому виникає потреба у використанні ЕОМ для знаходження коренів СЛАР?

32. На які етапи розпадається процес розв'язання СЛАР методом Гаусса?

33. Які елементарні перетворення покладені в основу прямого ходу методу Гаусса?

34. Запишіть розрахункові формули для знаходження коефіцієнтів при невідомих і правих частин СЛАР трикутного вигляду.

35. Охарактеризуйте етапи алгоритму прямого ходу методу Гаусса з частковим упорядкуванням.
 36. Запишіть математичні формули, покладені в основу алгоритму зворотного ходу методу Гаусса.
 37. Наведіть блок-схему алгоритму обчислення відхилів, які виникають у ході розв'язання СЛАР.
 38. Що таке функціональна залежність? Охарактеризуйте способи завдання функції.
 39. Опишіть математичну постановку задачі інтерполяції функцій.
 40. Опишіть процес виводу інтерполяційної формули Лагранжа. Як оцінюється абсолютна похибка інтерполяційної формули Лагранжа?
 41. Наведіть алгоритм формальної інтерполяції функцій у точці.
 42. Опишіть математичну постановку задачі апроксимації функції.
 43. Виведіть розрахункові формули для знаходження коефіцієнтів лінійної апроксимуючої функції.
 44. Наведіть алгоритм лінійної апроксимації.
 45. Як алгоритм лінійної апроксимації використовується для знаходження апроксимуючої функції у вигляді будь-якої елементарної функції з двома параметрами?
 46. Виведіть розрахункові формули для знаходження коефіцієнтів апроксимуючої функції у вигляді квадратного тричлена.
 47. Наведіть алгоритм квадратичної апроксимації.
 48. Сформулюйте задачу Коші.
 49. Виведіть формулу методу Ейлера для розв'язання задачі Коші. Яка геометрична інтерпретація методу Ейлера?
 50. Наведіть алгоритм методу Ейлера.
 51. Охарактеризуйте метод подвійного перерахунку для розв'язання задачі Коші методом Ейлера. Наведіть відповідну блок-схему алгоритму.
 52. Опишіть процес виводу формули методу Рунге–Кутта для розв'язання задачі Коші.
 53. Наведіть алгоритм методу Рунге–Кутта.
 54. Охарактеризуйте метод подвійного перерахунку для розв'язання задачі Коші методом Рунге–Кутта. Наведіть відповідну блок-схему алгоритму.
 55. Чому метод Рунге–Кутта є методом підвищеної точності?
-

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ ДО РОЗДІЛУ ДРУГОГО

1. **Бахвалов, Н. С.** Численные методы [Текст] / Н. С. Бахвалов. – М. : Наука, 1973.
 2. **Березин, И. С.** Методы вычислений [Текст] / И. С. Березин, Н. П. Жидков. – М. : Физматгиз, 1966.
 3. **Боглаев, Ю. П.** Вычислительная математика и программирование [Текст] / Ю. П. Боглаев. – М. : Высш. шк., 1990.
 4. **Демидович, Б. П.** Основы вычислительной математики [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон. – М. : Наука, 1970.
 5. **Демидович, Б. П.** Численные методы анализа [Текст] / Б. П. Демидович, И. А. Марон, Э. З. Шувалова. – М. : Наука, 1967.
 6. **Заварыкин, В. М.** Численные методы [Текст] / В. М. Заварыкин, В. Г. Житомирский, М. П. Лапчик. – М. : Просвещение, 1991.
 7. **Мак-Кракен, Д.** Численные методы и программирование на Фортране [Текст] / Д. Мак-Кракен, У. Дорн. – М. : Мир, 1977.
 8. **Форсайт, Дж.** Машинные методы математических вычислений [Текст] / Дж. Форсайт, М. Мальком, К. Моллер. – М. : Мир, 1980.
-