Лр№5. Предикати та операції з ними

Речення, в яке входять змінні і яке при заміні змінних можливими для них значеннями стає висловленням, називається *висловлювательною формою* або *предикатом*.

При заданні предиката має бути зазначеною множина X тих значень, що можуть приймати змінні; вона називається *областю визначення предиката* або *предметною областю*. Змінні, які містить предикат, називаються предметними змінними.

Якщо предикат містить лише одну змінну, він називається одномісним; при наявності n змінних предикат називається n-місним. Число змінних, що містить предикат, називають також його порядком.

Нехай X – область визначення предиката. Підмножина множини X, яка складається з тих значень змінних, при яких даний предикат перетворюється в істинне висловлення, називається *множиною* (або *областю*) *істинності предиката*.

Одномісні предикати з однією змінною x позначають як $P(x)$, $Q(x)$, ...; двомісні з двома змінними x, y – як $P(x, y)$, $Q(x, y)$, …; n-місні – у вигляді $P(x_1, x_2, …, x_n)$. Для скорочення записів замість $P(x)$, $P(x, y)$, … часто пишуть просто P. Множину істинності предиката P позначають тією ж буквою, що і сам предикат, але з верхнім індексом +, тобто P^+.

Предикат з областю визначення X називається *тотожно істинним*, якщо при будь-яких значеннях змінних з X він перетворюється в істинне висловлення, і *тотожно хибним*, якщо при будь-яких значеннях змінних з X він перетворюється в хибне висловлення.

Два предикати з однієї і тією же областю визначення X називаються *рівносильними,* якщо вони мають однакові множини істинності. Рівносильність предикатів P і Q позначається так: $P \sim Q$.

Нехай P і Q – два предикати із спільною областю визначення X. Говорять, що предикат Q є наслідком предиката P, якщо область істинності предиката P є частиною області істинності предиката Q (або збігається з нею), тобто якщо $P^+ \subseteq Q^+$.

Над предикатами здійснюються ті ж самі логічні операції, що і над висловленнями: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність.

Заперечення предиката $P(x)$ з областю визначення X позначимо $\overline{P}(x)$ і зауважимо: предикат $\overline{P}(x)$ (читається: "Невірно, що $P(x)$") має ту ж саму область визначення X і множину $X \setminus P^+$ як область істинності.

Кон'юнкція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \wedge Q(x)$ (читається "$P(x)$ і $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^+ \bigcap Q^+$.

Диз'юнкція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \vee Q(x)$ (читається "$P(x)$ або $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^+ \bigcup Q^+$.

Імплікація предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \to Q(x)$ (читається "Якщо $P(x)$, то $Q(x)$" або "Із $P(x)$ випливає $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^- \bigcup Q^+$.

Еквівалентність предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, що визначені відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \sim Q(x)$ (читається: "$P(x)$ тоді і тільки тоді, коли $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $(P^+ \bigcap Q^+) \bigcup (P^- \bigcap Q^-)$.

Розглянуті логічні операції над предикатами у певному сенсі аналогічні відповідним операціям над висловленнями. Однак оскільки поняття предиката істотно ширше, ніж поняття висловлення (предикат перетворюється у висловлення лише при фіксованих значеннях змінних, що входять до нього), для предикатів існують операції, які не мають аналогів серед операцій над висловленнями. Це – так звані кванторні операції. Кожна з них застосовується до одномісного предиката й перетворює його у висловлення.

Операцією *квантор загальності* називається правило, яке кожному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині X, ставить у відповідність висловлення, що позначається $\forall x P(x)$ (читається: "Для всіх x справедливо $P(x)$") і є істинним тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно істинний.

У випадку, коли множина X, на якій визначено предикат $P(x)$, скінченна й складається з елементів a_1, a_2, …, a_n , висловлення $\forall x P(x)$ рівносильне кон'юнкції всіх висловлень $P(a_1)$, ..., $P(a_n)$; інакше кажучи, висловлення $\forall x P(x)$ має ті ж самі значення істинності, що і висловлення $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

Операцією *квантор існування* називається правило, яке кожному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині X, ставить у відповідність висловлення, що позначається $\exists x P(x)$ (читається: "Існує значення $x \in X$ таке, що вірно $P(x)$") і є хибним тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно хибний.

Самі символи $\forall$ і $\exists$ також називають кванторами загальності та існування, а приєднання їх до предиката $P(x)$ часто називають "навішуванням" відповідного квантора на предикат $P(x)$.

У висловленнях $\forall x\, P(x)$ і $\exists x\, P(x)$ змінна x перестає бути змінною у звичайному змісті цього слова: на її місце вже не можна підставляти конкретні елементи з множини X. Змінну x у зазначеній ситуації називають *зв'язаною*. Замість x можна вжити будь-яку іншу букву, наприклад y; інакше кажучи, висловлення $\forall x\, P(x)$ і $\forall y\, P(y)$ однакові.

Візьмемо до уваги, що у виразах, де область дії квантора не визначено дужками, квантор має найвищий пріоритет; тому спочатку виконується квантифікація, а потім діють інші логічні операції.

"Навішування" кванторів можливо й у випадку багатомісних предикатів. При цьому кожна змінна повинна бути зв'язана тільки одним квантором. Наприклад, у випадку двомісного предиката $P(x,\ y)$ можна розглянути наступні висловлення:

$$\exists x \exists y\, P(x,y), \quad \exists x \forall y\, P(x,y), \quad \forall x \exists y\, P(x,y), \quad \forall x \forall y\, P(x,y)$$

(перше з цих висловлень читається так: "Існують таке x і таке y, при яких справедливо $P(x, y)$"; аналогічно читаються інші три висловлення).

3.2.01. На універсумі $U = \{-5\,..\,7\}$ визначені предикати $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ з наведеними нижче областями істинності:

$$P^+ = \{x \mid x \neq 3k \wedge k \in Z \wedge x \in U\}, \qquad Q^+ = \{x \mid x = 2k+1 \wedge k \in Z \wedge x \in U\},$$

$$R^+ = \{x \mid x = 3k-2 \wedge k \in Z \wedge x \in U\}, \quad S^+ = \{-2,-1,1,2,3,4,5\}.$$

Потрібно:

а) застосовуючи закони алгебри множин, виразити множину, яка є областю істинності предиката $T(x) = \left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$, через області істинності предикатів $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$;

б) знайти елементи цієї множини;

в) для перевірки отриманого результату побудувати таблицю істинності предиката $T(x)$.

Розв'язання. а) Для того щоб отримати зажадане подання області істинності предиката $\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$, виконуємо послідовно відповідні операції з множинами P^+, Q^+, R^+, S^+, що запропоновані як області істинності окремих операндів предиката $T(x)$.

$$\left[\underbrace{\overline{P(x) \vee Q(x)}}_{\text{закон де Моргана}}\right]^+ = \left[\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}\right]^+ = \left[\overline{P(x)}\right]^+ \cap \left[\overline{Q(x)}\right]^+ =$$

$$= (\underbrace{U \setminus P^+}_{U \setminus X \equiv U \cap \overline{X}}) \cap (\underbrace{U \setminus Q^+}_{U \setminus X \equiv U \cap \overline{X}}) = \underbrace{(U \cap \overline{P^+}) \cap (U \cap \overline{Q^+})}_{\text{асоціативний закон};\, U \cap U \equiv U} =$$

$$= \underbrace{U \cap P^- \cap Q^-}_{U \cap X \equiv X} = P^- \cap Q^- = \{0, 6\}.$$

$$\left[\overline{R(x)} \vee Q(x)\right]^{+} = \left[\overline{R(x)}\right]^{+} \bigcup \left[Q(x)\right]^{+} = (U \setminus R^{+}) \bigcup Q^{+} = (U \bigcap R^{-}) \bigcup Q^{+} =$$
$$= R^{-} \bigcup Q^{+} = \{-5..-3, -1..3, 5..7\}.$$

Узявши формулу для знаходження області істинності предиката-еквівалентності $[A(x) \sim B(x)]^{+} = (A^{+} \bigcap B^{+}) \bigcup (A^{-} \bigcap B^{-})$ і враховуючи те, що згідно із законом де Моргана множинами хибності тільки що розглянутих операндів еквівалентності є $P^{+} \bigcup Q^{+}$ та $R^{+} \bigcap Q^{-}$, матимемо

$$\left[\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right]^{+} =$$
$$= ((P^{-} \bigcap Q^{-}) \bigcap (R^{-} \bigcup Q^{+})) \bigcup ((P^{+} \bigcup Q^{+}) \bigcap (R^{+} \bigcap Q^{-})) =$$
$$= ((P^{-}R^{-} \bigcap Q^{-}R^{-}) \bigcup \underbrace{(P^{-}Q^{+} \bigcap \underbrace{Q^{-}Q^{+}}_{\varnothing}}_{X \bigcap \varnothing \equiv \varnothing})) \bigcup$$
$$\bigcup ((P^{+}R^{+} \bigcap P^{+}Q^{-}) \bigcup \underbrace{(Q^{+}R^{+} \bigcap \underbrace{Q^{+}Q^{-}}_{\varnothing}}_{X \bigcap \varnothing \equiv \varnothing})) = P^{-}R^{-}Q^{-} \bigcup P^{+}R^{+}Q^{-} =$$
$$= (P^{-} \cdot R^{-} \bigcup P^{+} \cdot R^{+}) \bigcap Q^{-} =$$
$$= \{-5, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 7\} \bigcap \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\} = \{-2, 0, 4, 6\}.$$

Остаточно, $\left[\overline{S(x)}\right]^{+} = U \setminus S^{+} = S^{-} = \{-5..-3, 0, 6, 7\}$ і

$$T^{+} = \left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right)\right]^{+} \bigcap \left[\overline{S(x)}\right]^{+} =$$
$$= ((P^{-} \bigcap R^{-}) \bigcup (P^{+} \bigcap R^{+})) \bigcap Q^{-} \bigcap S^{-}.$$

б) Маючи на увазі отримані під час побудови аналітичного виразу для множини T^{+} елементи множин $\left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right)\right]^{+}$ і $\left[\overline{S(x)}\right]^{+}$, визначимо елементи множини T^{+}:

$$T^{+} = \{-2, 0, 4, 6\} \bigcap \{-5..-3, 0, 6, 7\} = \{0, 6\}.$$

в) Перевіримо отриманий результат за допомогою таблиці істинності предиката $T(x) = \left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$.

Таблиця 3.1

Предикат	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1

Предикат	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$Q(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
$R(x)$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$S(x)$	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{P(x) \vee Q(x)}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$\overline{R(x)} \vee Q(x)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
$\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$T(x)$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0

Отже, область істинності заданого предиката

$$T^{+} = \left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}\right]^{+} = \{0, 6\}. \qquad \square$$

В задачах 3.2.01 – 3.2.25 на універсумі U визначені предикати $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ з областями істинності, поданими в табл. 3.2. Потрібно:

а) застосовуючи закони алгебри множин, виразити множину, яка є областю істинності предиката $T(x)$, через області істинності предикатів $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$;

б) знайти елементи цієї множини;

в) для перевірки отриманого результату побудувати таблицю істинності предиката $T(x)$.

№ завдання	Універсум (множина U)	Області істинності предикатів $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$	Предикат $T(x)$
3.2.01.	$\{-10\,..\,5\}$	$P^{+} = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k+1 \wedge k \in Z\}$, $Q^{+} = \{-10..-7, -3..0, 3..5\}$, $R^{+} = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k+1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \downarrow R(x)) \leftarrow \overline{Q(x)}$
3.2.02.	$\{-9\,..\,6\}$	$P^{+} = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k-2 \wedge k \in Z\}$, $Q^{+} = \{-9..-6, -2..1, 4..6\}$, $R^{+} = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k+3 \wedge k \in Z\}$	$P(x) \to (\overline{Q(x)} \wedge R(x))$

3.2.03.	{–8 . . 7}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 5k - 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-8..-5, -1..2, 5..7\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 2k \wedge k \in Z\}$	$(\overline{P(x)} \to Q(x)) \wedge R(x)$
3.2.04.	{–7 . . 8}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-7..-4, 0..3, 6..8\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k - 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \wedge \overline{R(x)}) \leftarrow Q(x)$
3.2.05.	{–6 . . 9}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k - 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-6..-3, 1..4, 7..9\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 6k \wedge k \in Z\}$	$P(x) \oplus \overline{Q(x) \to R(x)}$
3.2.06.	{–11 . . 4}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-11..-8, -4..-1, 2..4\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 5k + 1 \wedge k \in Z\}$	$(\overline{P(x)} \wedge Q(x)) \leftarrow R(x)$
3.2.07.	{– 5 . . 10}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k - 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-5..-2, 2..5, 8..10\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \vee \overline{R(x)}) \to Q(x)$
3.2.08.	{– 4 . . 11}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k + 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-4..-1, 3..6, 9..11\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k - 3 \wedge k \in Z\}$	$\overline{P(x) \leftarrow Q(x)} \sim R(x)$
3.2.09.	{– 3 . . 12}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k - 3 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-3..0, 4..7, 10..12\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 2k + 1 \wedge k \in Z\}$	$P(x) \mid (Q(x) \sim \overline{R(x)})$
3.2.10.	{– 2 . . 13}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k - 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-2..1, 5..8, 11..13\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k + 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \vee Q(x)) \to \overline{R(x)}$
3.2.11.	{– 1 . . 14}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k - 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{-1..2, 6..9, 12..14\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 6k + 4 \wedge k \in Z\}$	$P(x) \vee (Q(x) \to \overline{R(x)})$
3.2.12.	{0 . . 15}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k - 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{0..3, 7..10, 13..15\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k + 4 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \oplus \overline{Q(x)}) \mid R(x)$
3.2.13.	{15 . . 30}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{15..18, 22..25, 28..30\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k + 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \sim R(x)) \to \overline{Q(x)}$
3.2.14.	{1 . . 16}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k + 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{1..4, 8..11, 14..16\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k \wedge k \in Z\}$	$\overline{P(x)} \to (Q(x) \wedge R(x))$

3.2.15.	{2 . . 17}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k - 4 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{2..5, 9..12, 15..17\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k + 2 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \leftarrow Q(x)) \sim \overline{R(x)}$

3.2.16.	{3 . . 18}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k + 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{3..6, 10..13, 16..18\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k - 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \oplus R(x)) \vee \overline{Q(x)}$
3.2.17.	{4 . . 19}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{4..7, 11..14, 17..19\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 6k - 1 \wedge k \in Z\}$	$P(x) \vee \overline{Q(x) \leftarrow R(x)}$
3.2.18.	{6 . . 21}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k + 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{6..9, 13..16, 19..21\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k - 2 \wedge k \in Z\}$	$(\overline{P(x)} \vee Q(x)) \sim R(x)$
3.2.19.	{5 . . 20}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k - 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{5..8, 12..15, 18..20\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k + 3 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \wedge \overline{R(x)}) \leftarrow Q(x)$
3.2.20.	{7 . . 22}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k - 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{7..10, 14..17, 20..22\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 2k + 1 \wedge k \in Z\}$	$P(x) \leftarrow (\overline{Q(x)} \vee R(x))$
3.2.21.	{8 . . 23}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k + 3 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{8..11, 15..18, 21..23\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k - 2 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \oplus Q(x)) \vee \overline{R(x)}$
3.2.22.	{9 . . 24}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k + 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{9..12, 16..19, 22..24\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k - 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \mid R(x)) \leftarrow \overline{Q(x)}$
3.2.23.	{11 . . 26}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 4k - 3 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{11..14, 18..21, 24..26\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 6k + 2 \wedge k \in Z\}$	$\overline{P(x)} \sim (Q(x) \oplus R(x))$
3.2.24.	{12 . . 27}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 3k + 1 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{12..15, 19..22, 25..27\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 5k - 3 \wedge k \in Z\}$	$\overline{P(x) \rightarrow Q(x)} \sim R(x)$
3.2.25.	{10 . . 25}	$P^+ = \{x \mid x \in U \wedge x = 3k + 2 \wedge k \in Z\}$, $Q^+ = \{10..13, 17..20, 23..25\}$, $R^+ = \{x \mid x \in U \wedge x \neq 4k - 1 \wedge k \in Z\}$	$(P(x) \vee \overline{R(x)}) \oplus Q(x)$