



Компьютерная графика

Лекция 3: Аффинные
преобразования на плоскости



*Евгений Беркунский, ИУСТ, НУК
eugeny.berkunsky@gmail.com
<http://berkut.homelinux.com>
<https://twitter.com/EugenyB>*

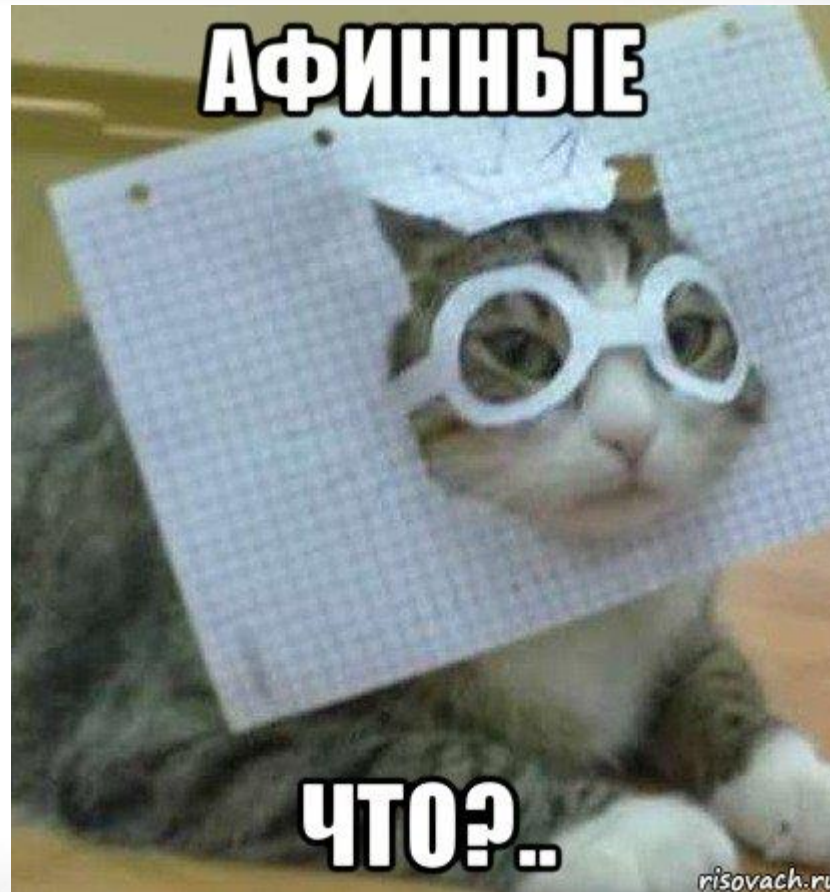


Определение

- Преобразование плоскости называется **аффинным**, если оно взаимно однозначно и образом любой прямой является прямая.
- Преобразование называется **взаимно однозначным**, если оно разные точки переводит в разные, и в каждую точку переходит какая-то точка.



Определение

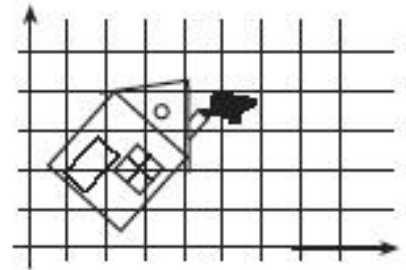
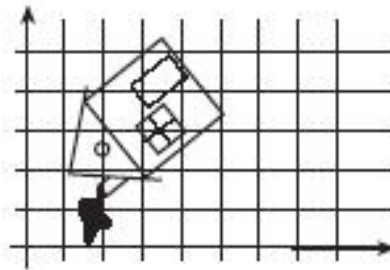
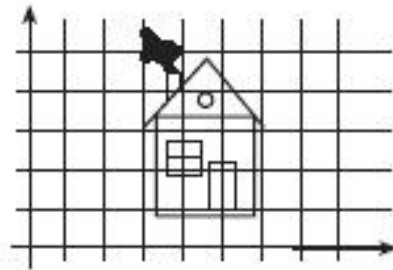
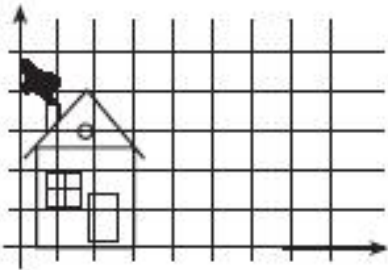


Определение

Частным случаем аффинных преобразований являются просто движения (без какого-либо сжатия или растяжения).

- Движения — это такие преобразования, которые сохраняют расстояние между любыми двумя точками неизменным, а именно **параллельные переносы, повороты, различные симметрии** и их комбинации.

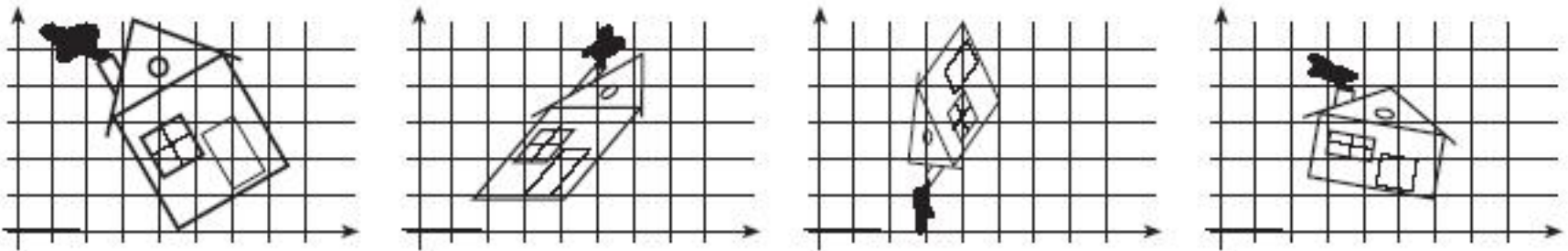
Движения



Определение

Другой важный случай аффинных преобразований — это растяжения и сжатия относительно прямой.

На рисунке — различные аффинные преобразования



Свойства аффинных преобразований

Аффинные преобразования сохраняют прямые и свойство различия двух точек:

$$1^\circ \quad \begin{array}{ccc} \bullet A & \xleftrightarrow{f_{aff}} & \bullet A' \\ \bullet B & & \bullet B' \end{array}$$

Точки переходят в точки.

Причем различные точки переходят в различные точки

$$2^\circ \quad \begin{array}{ccc} /l & \xleftrightarrow{f_{aff}} & /l' \end{array}$$

Прямые переходят в прямые

Композиция аффинных преобразований есть снова аффинное преобразование

$$3^\circ \quad f, g \in Aff \Rightarrow (f \circ g) \in Aff.$$

Преобразование, обратное к аффинному, есть снова аффинное преобразование

$$4^\circ \quad f \in Aff \Rightarrow f^{-1} \in Aff.$$

Свойства аффинных преобразований

Аффинное преобразование на плоскости описывается формулами

$$x' = Ax + By + C$$

$$y' = Dx + Ey + F$$

где A, B, C, D, E, F – константы

При этом должно соблюдаться условие $\begin{vmatrix} A & B \\ D & E \end{vmatrix} \neq 0$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Матричная запись аффинных преобразований

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

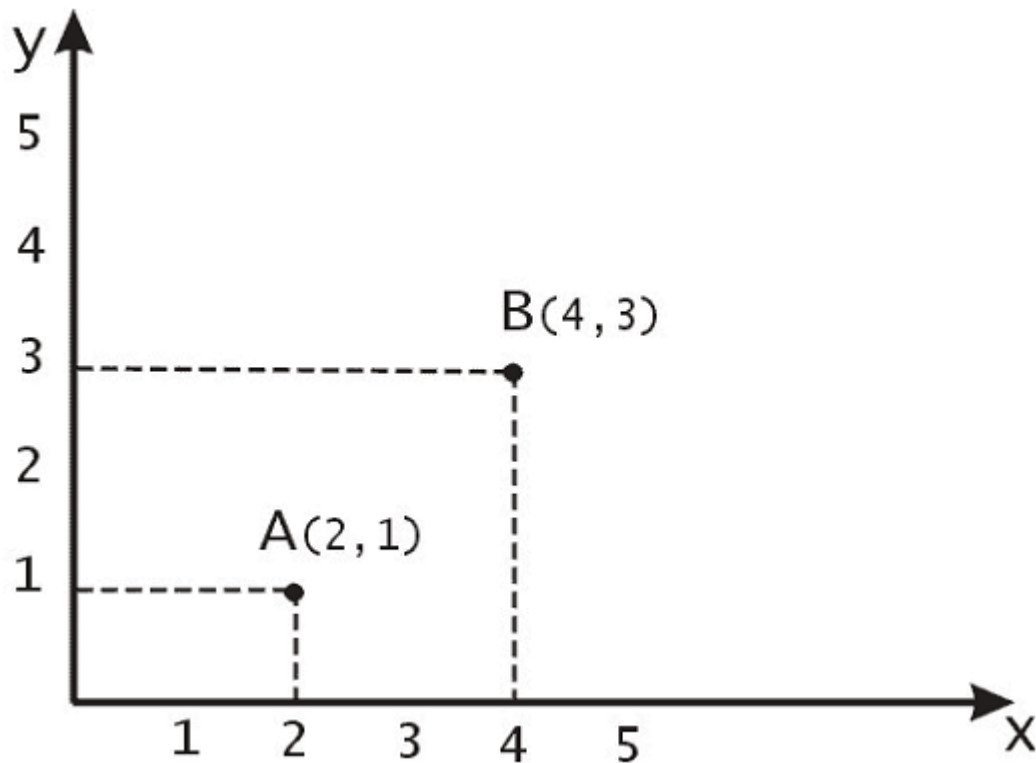
Основные виды аффинных преобразований

1. Параллельный перенос
2. Масштабирование
3. Поворот

Все преобразования можно представить в матричной форме



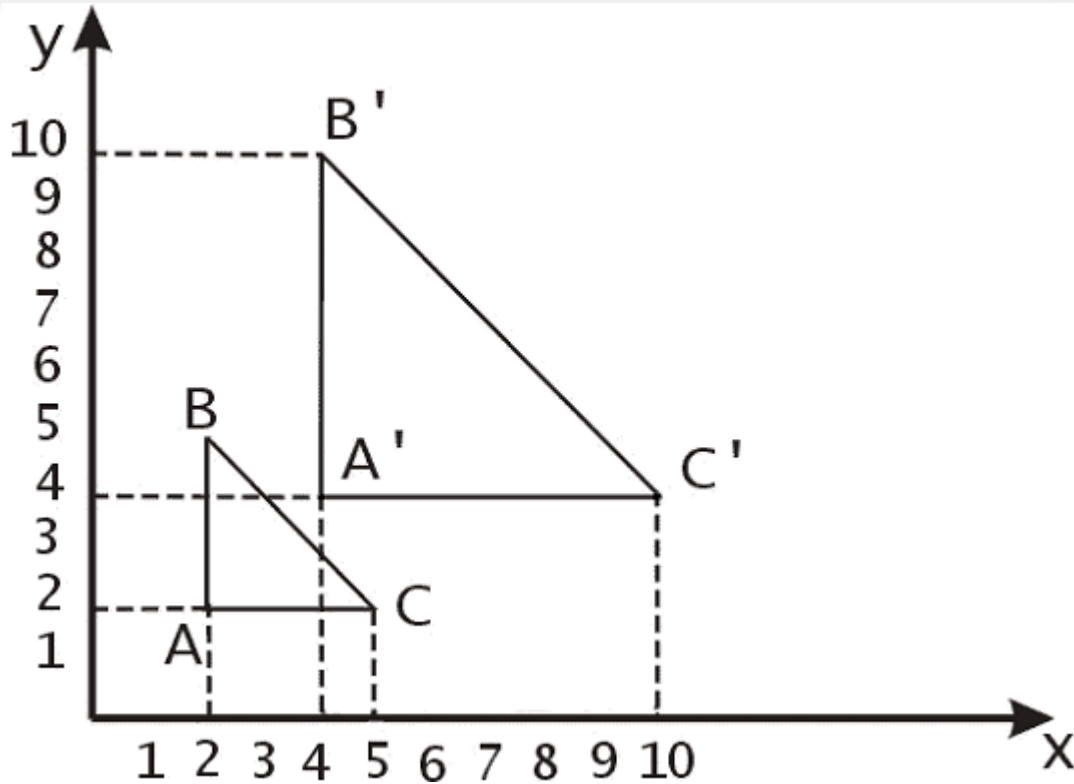
Параллельный перенос



$$\begin{cases} x' = x + dx \\ y' = y + dy \end{cases}$$

$$T(dx, dy) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

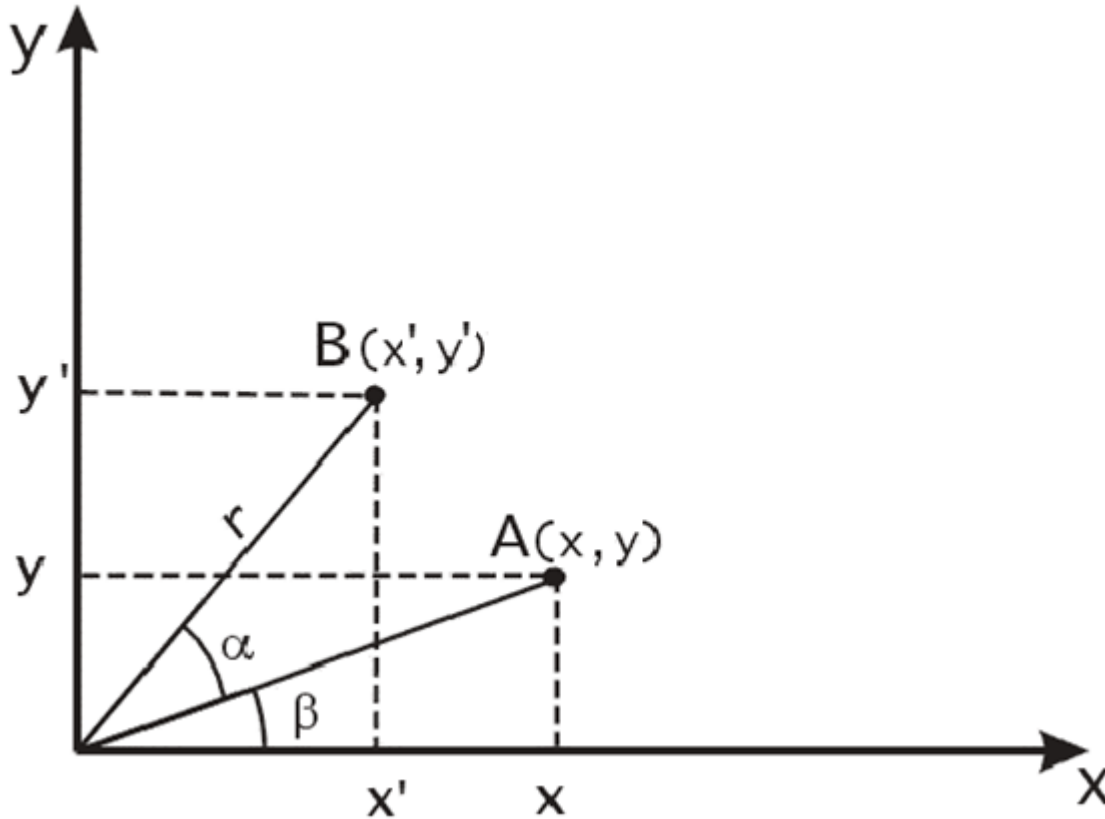
Масштабирование



$$\begin{cases} x' = x * S_x \\ y' = y * S_y \end{cases}$$

$$S(s_x, s_y) \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Поворот

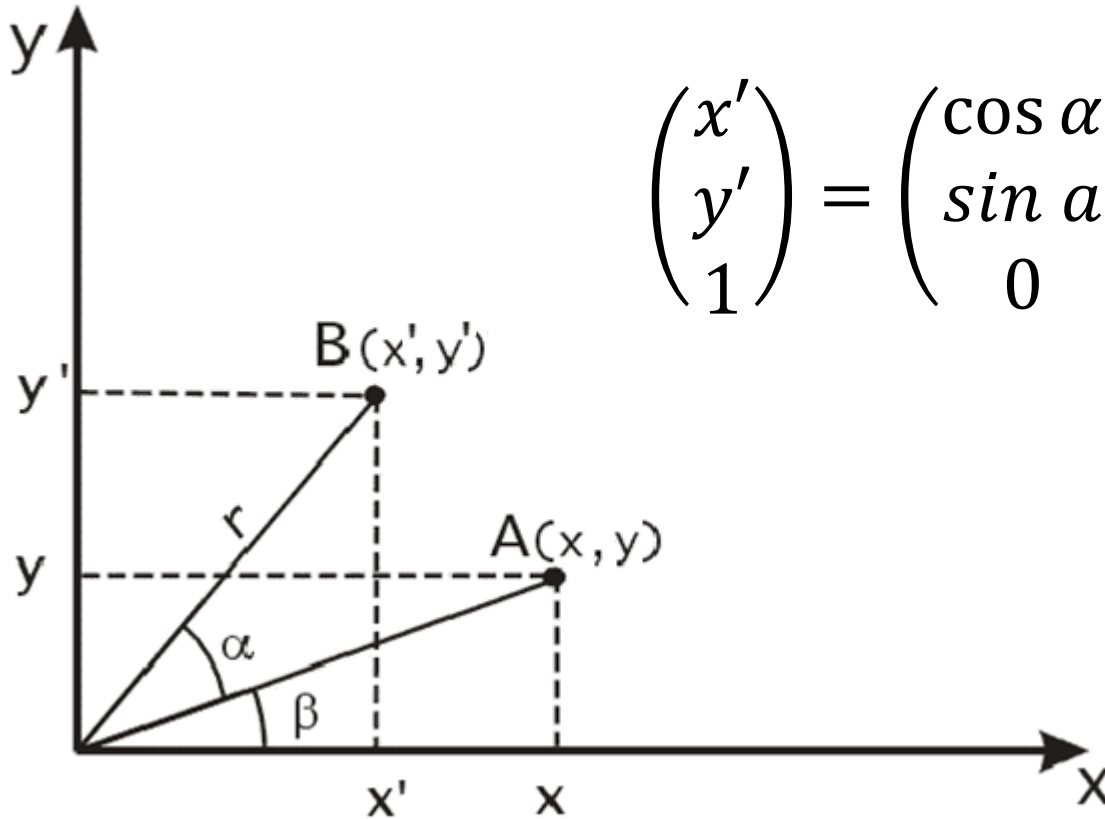


$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta)$$
$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta)$$

$$x = r \cdot \cos \beta$$
$$y = r \cdot \sin \beta$$

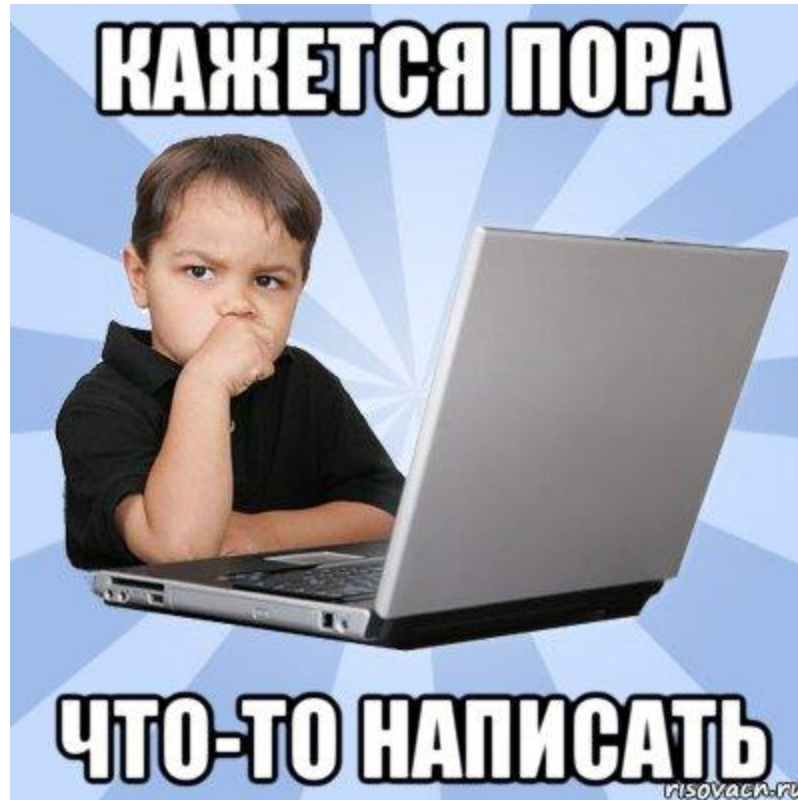
$$x' = r \cdot \cos(\alpha + \beta) = r(\cos \alpha \cdot \cos \beta - \sin \alpha \cdot \sin \beta) = x \cdot \cos \alpha - y \cdot \sin \alpha$$
$$y' = r \cdot \sin(\alpha + \beta) = r(\sin \alpha \cdot \cos \beta + \cos \alpha \cdot \sin \beta) = x \cdot \sin \alpha + y \cdot \cos \alpha$$

Поворот



$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Демонстрація



Аффинные преобразования





Компьютерная графика

Лекция 3: Аффинные
преобразования на плоскости



*Евгений Беркунский, ИУСТ, НУК
eugeny.berkunsky@gmail.com
<http://berkut.homelinux.com>
<https://twitter.com/EugenyB>*

