Лабораторна робота №3. Афінні перетворення на площині

Завдання

1. Створити програму, що матиме зручний інтерфейс (вікно, головне меню, рядок статусу та ін.). У вікні програми повинно створюватися та відображатись зображення фігури, створеної відповідно завдання лабораторної роботи №2.
2. За допомогою операцій з матрицями і векторами реалізувати афінні перетворення фігури (переміщення по екрану, збільшення/зменшення, повороти). Програма повинна надавати можливість виконання над фігурою трьох основних афінних перетворень, при цьому вибір точки, відносно якої буде відбуватися поворот також повинен обиратись користувачем.

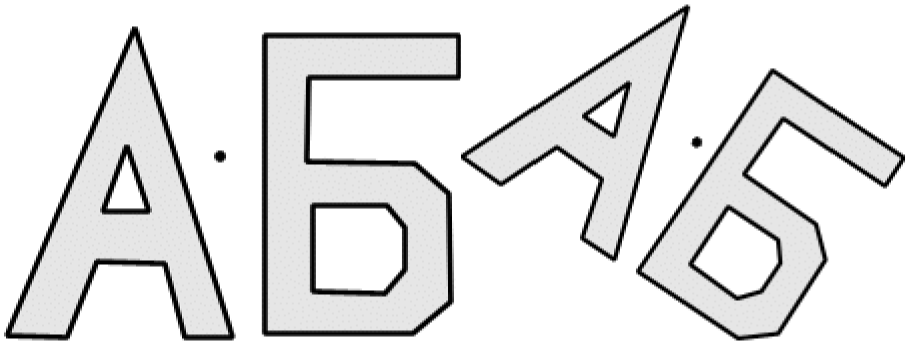

Рис. 5 — Завдання до лабораторної роботи №3.

Теоретичні відомості

Задамо якусь двовимірну систему координат (x,y). Афінне перетворення на площині описується формулами

$$X = Ax + By + C$$

$$Y = Dx + Ey + F$$

де A, B, C, D, E, F – константи. Значення (X,Y) можна розглядати, як координати в новій системі координат. Обернене перетворення (X,Y) у (x,y) також є афінним.

Афінні перетворення зручно записувати у матричному вигляді. Константи A, B, D, E утворюють матрицю перетворення, котра, будучи помножена на матрицю-стовпець координат (x,y) дає матрицю-стовпець (X,Y). Однак щоб урахувати константи C та F, необхідно перейти до так званих ***однорідних координат*** — додамо ще один рядок у матрицях координат:

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & C \\ D & E & F \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Матричний запис дає можливість наочно описувати декілька перетворень, що йдуть одні за одними. Наприклад, якщо необхідно спочатку виконати перетворення

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

а потім — інше перетворення

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix}$$

то це можна описати як

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Однак замість двох перетворень можна виконати тільки одне

$$\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} & & \\ & C & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

де матриця С дорівнює добутку ВА.

Тепер розглянемо окремі випадки афінного перетворення.

1. Паралельний зсув координат (рис.6)

На рис. 6 точка A перетворюється у точку B.

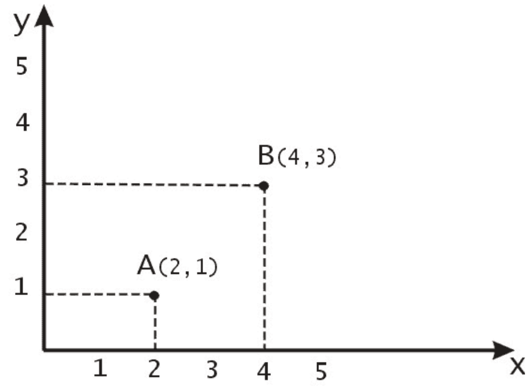

Рис. 6 — Операція паралельного зсуву, або трансляції точки A в точку B.

$$\begin{cases} X = x + dx \\ Y = y + dy \end{cases}$$ У матричній формі: $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & dx \\ 0 & 1 & dy \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Розтягнення-стискання, або масштабування (рис. 7)

Масштабуванням об’єктів називається розтягнення об’єктів вздовж відповідних осей координат відносно початку координат. Ця операція застосовується до кожної точки об’єкта, тому можна також говорити про масштабування точки. При цьому, звісно, мова не іде про зміну розмірів самої точки. Масштабування досягається множенням координат точок на деякі константи. В тому випадку, коли ці константи однакові, масштабування називають однорідним. На рис.7 наведено приклад однорідного масштабування трикутника ABC.

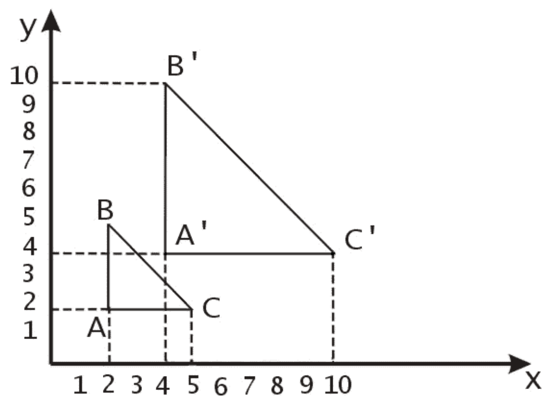

Рис. 7 – Операція масштабування

Після застосування операції однорідного масштабування з коефіцієнтом 2 він переходить в трикутник $A^{'}B^{'}C^{'}$.

Масштабування можна представити такими формулами:

$$\begin{cases} X = x * S_x \\ Y = y * S_y \end{cases} \text{ у матричній формі } \begin{bmatrix} S_x & 0 & 0 \\ 0 & S_y & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Коефіцієнти S_x та S_y можуть бути від'ємними. Наприклад, S_x=-1 відповідає дзеркальному відбиттю відносно осі Y.

3. **Поворот** (рис. 8)

На рисунку 8 точка $A = (x, y)$ переходить в точку $B = (x^{'}, y^{'})$ поворотом на кут α.

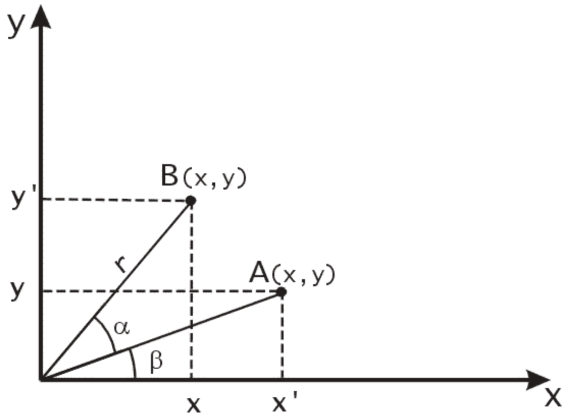

Рис. 8. Операція повороту точки A на кут α.

Знайдемо перетворення координат точки A в точку B. Позначимо кут, що утворює радіус-вектор OA з віссю Ox як α. Нехай r - довжина радіуса-вектора OA, тоді

$$x^{'} = r \cdot Cos(\alpha + \beta) = r(Cos\alpha \cdot Cos\beta - Sin\alpha \cdot Sin\beta)$$
$$y^{'} = r \cdot Sin(\alpha + \beta) = r(Sin\alpha \cdot Cos\beta + Cos\alpha \cdot Sin\beta)$$

Оскільки $Cos\beta = x/r$ и $Sin\beta = y/r$, то підставляючи ці вирази в рівняння для $x^{'}$ и $y^{'}$, отримуємо:

$$x^{'} = x \cdot Cos\alpha - y \cdot Sin\alpha$$
$$y^{'} = x \cdot Sin\alpha + y \cdot Cos\alpha$$

У матричному вигляді:

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Розглянемо, яким образом за допомогою композиції матричних перетворень можна одержати одне загальне результуюче перетворення. Для цього будемо використовувати матриці T, S й R. З обчислювальної точки зору набагато простіше й швидше застосовувати матрицю вже готового перетворення замість того, щоб застосовувати їх послідовно одну за іншою. До точки більш ефективно застосовувати одне результуюче перетворення, ніж ряд перетворень один за одним.

Для прикладу розглянемо завдання повороту об'єкта на площині щодо деякої довільної точки (X,Y). Поки ми вміємо повертати об'єкти тільки навколо початку координат. Але можна представити це завдання як послідовність кроків, на кожному з яких буде застосовуватися тільки елементарна операція: зсув, масштабування або обертання.

Ось ця послідовність елементарних перетворень (рис. 9):

1. Зсув, при якому точка p_0 переходить в початок координат.
2. Поворот на вказаний кут.
3. Зсув, при якому точка з початку координат повертається в початкове положення p_0.

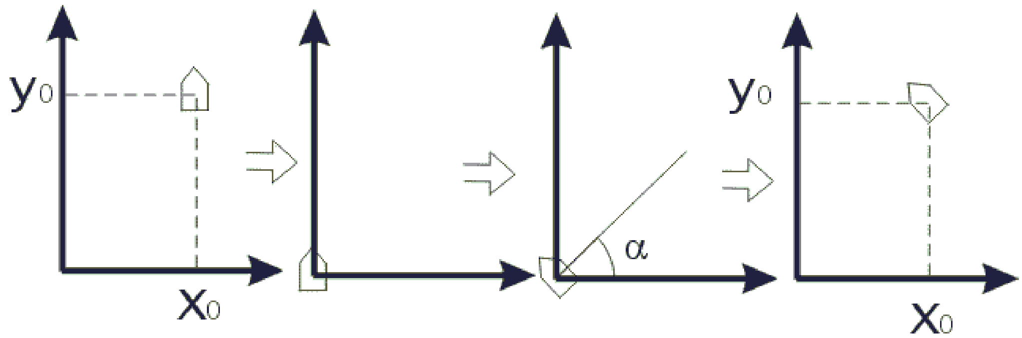

Рис. 9. – Послідовність перетворень при повороті навколо точки $p_0 = (x_0, y_0)$ на кут α.

Точка $p_0 = (x_0, y_0)$. Перший зсув відбувається на вектор $[-x_0, -y_0]$, а зворотний перенос - на вектор $[x_0, y_0]$.