

Мінімізація ДНФ

Основні поняття мінімізації

Кожна формула алгебри висловлень, а значить і булева функція, може бути представлена у вигляді ДНФ багатьма способами, і тому постає питання про вибір такого її представлення, яке було б у певному сенсі найпростішим. Але яку формулу вважати найпростішою, за яким принципом здійснювати вибір? Цей вибір здійснюють з урахуванням найменшого значення так званого коефіцієнта (індекса) простоти $L(F)$, який характеризує складність ДНФ. Найчастіше зустрічаються наступні три типи коефіцієнтів простоти:

- 1) $L'(F)$ – число символів змінних в запису ДНФ (враховується кожне входження змінної);
- 2) $L''(F)$ – число елементарних кон'юнкцій, що входять у дану ДНФ ;
- 3) $L'''(F)$ – число символів заперечення в запису ДНФ.

Нехай, наприклад, задано дві еквівалентні формули:

$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3;$$

$$F_2 = F_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1.$$

Для цих формул маємо наступні значення зазначених коефіцієнтів простоти:

$$L'(F_1) = 15, \quad L''(F_1) = 5, \quad L'''(F_1) = 7;$$

$$L'(F_2) = 3, \quad L''(F_2) = 2, \quad L'''(F_2) = 3.$$

Порівнюючи наведені значення, робимо висновок про те, що за будь-яким типом коефіцієнта простоти формула F_2 є простішою.

Нехай функція $f(x_1, x_2)$ в якому-небудь наборі аргументів (α_1, α_2) функція набуває значення a_1 , а функція $\varphi(x_1, x_2)$ в цьому самому наборі – значення a_2 . Тоді говорять, що функція у заданому наборі своїм значенням a_2 покриває значення a_1 .

ДДНФ будується так, що кожна одиниця булевої функції покривається одиницею тільки одного терма-кон'юнкції. Тому кількість таких термів, що входять у ДДНФ, дорівнює числу наборів, у яких функція дорівнює 1.

Ідея побудови скороченої ДНФ полягає в тому, що в неї включаються елементарні кон'юнкції, які покривають своїми одиницями не одну, а декілька одиниць заданої функції.

Наприклад, ДДНФ функції $f_{13} = x_1 \rightarrow x_2$ має вигляд

$$f_{13(\text{ДДНФ})} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2 + x_1x_2. \quad (9.1)$$

Кожна з кон'юнкцій $\bar{x}_1\bar{x}_2$, \bar{x}_1x_2 , x_1x_2 покриває тільки одну з трьох одиниць цієї функції. Проте, якщо взяти за елементарний доданок диз'юнкції \bar{x}_1 , він покриватиме одиницями дві одиниці функції у двох наборах: (0,1) та (0,0), а елементарний доданок x_2 – так само у двох наборах: (0,1) та (1,1). Отже, \bar{x}_1 та x_2 спільно покривають одиницями всі одиниці функції f_{13} , яка, таким чином, може бути подана у вигляді ДНФ, значно простішій ніж ДДНФ (див. рис. 9.1):

$$f_{13} = \bar{x}_1 + x_2.$$

Булеву функцію φ називають *імплікантою* функції f , якщо вираз $\varphi \rightarrow f$ є тавтологією. Зауважимо наступне: якщо функція φ – імпліканта, вона покриває нулями всі нулі функції f (звідси випливає, що функція φ має не меншу кількість нулів, ніж функція f), а одиниці функції f можуть бути покриті як нулями, так і одиницями функції φ . Про імпліканту φ говорять, що вона входить у функцію f .

Імплікантам притаманні такі властивості:

- 1) Якщо $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – імпліканти функції f , то диз'юнкція $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$ також буде імплікантою цієї функції.
- 2) Якщо $\varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$ – імпліканта функції f , то $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ – також імпліканти цієї функції.

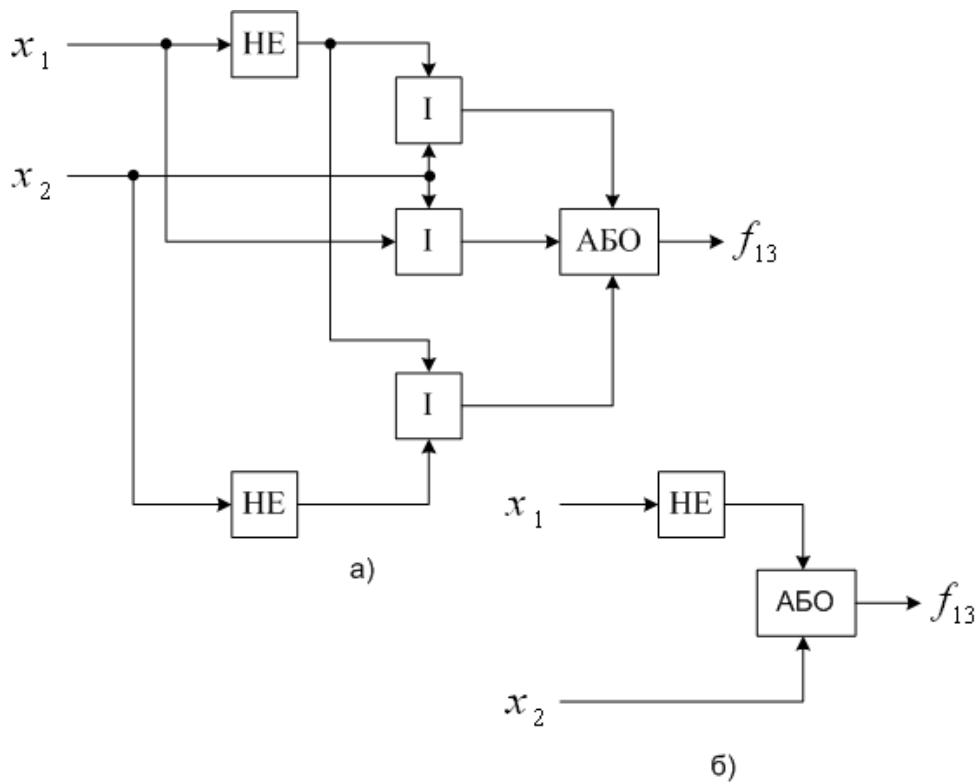


Рис. 9.1

- 3) Якщо імпліканти $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ в сукупності покривають всі одиниці функції f , то $f \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_n$.
- 4) Якщо деяку функцію f подано у вигляді диз'юнктивної нормальної форми $g_1 + g_2 + \dots + g_n$, то g_1, g_2, \dots, g_n – імпліканти функції f .

Власною частиною імпліканти називають кон'юнкцію, здобуту вилученням із неї одного або кількох множників. Наприклад, імпліканта $\bar{x}yz$ має власні частини $\bar{x}y$, yz , $\bar{x}z$, \bar{x} , y , z .

Простою імплікантою булевої функції f називається елементарна кон'юнкція, що сама входить у задану функцію, але жодна її власна частина у цю функцію не входить.

Наприклад, для функції

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xyz + \bar{x}y$$

кон'юнкції $\bar{x}\bar{y}z$ і xyz є простими імплікантами, а $\bar{x}yz$ і $\bar{x}y\bar{z}$ не є ними, оскільки їхня власна частина $\bar{x}y$ входить у задану функцію.

Диз'юнкція всіх можливих простих імплікант називається скороченою ДНФ булевої функції.

ДНФ (в тому числі скорочена) може містити "зайві" імпліканти (тобто такі, видалення яких є еквівалентне перетворення й не змінює логічного значення формули).

Скорочена ДНФ, з якої не можна видалити жодної імпліканти, називається тупиковою. Саме серед тупикових ДНФ є обов'язково відшукувана мінімальна форма.

Таким чином, загальна схема мінімізації ДНФ передбачає наступні дії:

- 1) отримання ДДНФ заданої логічної функції;
- 2) виділення з ДДНФ скороченої ДНФ цієї функції;
- 3) знаходження всіх тупикових ДНФ заданої функції;
- 4) вибір серед тупикових ДНФ мінімальної форми з урахуванням прийнятого коефіцієнта простоти.

Перехід від ДДНФ до скороченої ДНФ є найбільш складним пунктом зазначеного алгоритму. Саме способом реалізації цього пункту відрізняються методи мінімізації ДНФ, що існують і що наведені нижче.

Вказаний перехід здійснюється за допомогою операцій повного та неповного склеювання й поглинання. В операції повного склеювання

$$xy + \bar{x}y = (x + \bar{x})y = y$$

доданки xy і $\bar{x}y$ склеюються за змінною y . На відміну від цього в операції неповного склеювання, приймаючи до уваги закон поглинання ($y = y + xy$, або $y = y + \bar{x}y$), матимемо

$$xy + \bar{x}y = y + xy, \text{ або } xy + \bar{x}y = y + \bar{x}y.$$

Наприклад, ДДНФ функції $f_{13} = x_1 \rightarrow x_2$, яку представлено формулою (9.1), перетворюється у скорочену ДНФ наступним чином:

$$\begin{aligned} f_{13} &= \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1x_2 + x_1x_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) + x_1x_2 = \bar{x}_1 + x_1x_2 = \\ &= \bar{x}_1 + \bar{x}_1x_2 + x_1x_2 = \bar{x}_1 + (\bar{x}_1 + x_1)x_2 = \bar{x}_1 + x_2. \end{aligned}$$