Досконалі нормальні форми

Вище вже зазначено, що одну й ту саму логічну функцію можна представити у вигляді різних формул (подати у різних формах). Найбільш раціональним вважається представлення логічних функцій у нормальних і досконалих нормальних формах.

Елементарною кон'юнкцією (*мінтермом*) називається кон'юнкція скінченого числа логічних змінних та їхніх заперечень. Наприклад, $F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$.

Елементарною диз'юнкцією (*макстермом*) називається диз'юнкція скінченого числа логічних змінних та їхніх заперечень. Наприклад, $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$

Враховуючи таблиці істинності операцій кон'юнкції та диз'юнкції, зауважимо, що мінтерм є функцією, яка приймає одиничне значення при одному з усіх можливих наборів аргументів і нульове значення – при всіх інших, а макстерм – функцією, яка приймає нульове значення при одному з можливих наборів і одиничне значення – при всіх інших.

Число змінних (аргументів), що складають елементарну кон'юнкцію чи диз'юнкцію, називається її рангом. Наприклад, наведена вище функція F_1 є елементарною кон'юнкцією 3-го рангу, а функція F_2 – елементарною диз'юнкцією 4-го рангу.

Логічні функції можуть бути представлені в двох основних формах:

1) сума добутків – диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ),
2) добуток сум – кон'юнктивна нормальна форма (КНФ).

Якщо до складу логічної функції входять набори елементарних кон'юнкцій однакового рангу, які зв'язані диз'юнкцією, або набори елементарних диз'юнкцій однакового рангу, які зв'язані кон'юнкцією, те такі форми представлення логічної функції одержалі назву досконалих нормальних форм. Дамо розгорнуті означення.

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називається ДНФ, яка відповідає наступним вимогам:

а) всі кон'юнкції мають один і той самий ранг;

б) немає двох однакових кон'юнкцій;

в) жодна з кон'юнкцій не містить двох однакових множників;

г) жодна з кон'юнкцій не містить змінну разом з її запереченням.

Зазначені вимоги задовольняє, наприклад, така логічна функція:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3;$$

таким чином, вона є прикладом ДДНФ.

Кон'юнкції однакового рангу, які містять однакові змінні, називаються сусідніми, якщо вони відрізняються інвертуванням тільки однієї змінної. Приклад:

$$F' = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \quad \text{і} \quad F'' = x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3.$$

Сусідні кон’юнкції можна об'єднати, якщо винести за дужки спільні множники, застосувавши після цього закон виключеного третього:

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot \bar{x}_3 = x_1 \cdot x_2 \cdot (x_3 + \bar{x}_3) = x_1 \cdot x_2$$

Подібне об'єднання сусідніх кон'юнкцій має назву методу склеювання і використовується для зниження рангу кон’юнкцій у ДНФ.

З іншого боку, якщо функція містить кон'юнкції різних рангів, те закон виключеного третього $x + \bar{x} = 1$ варто застосувати для кон'юнкції молодшого рангу (помноживши цю кон'юнкцію на суму відсутньої в ній змінної та її заперечення) і підвищити тим самим ранг зазначеної кон'юнкції для створення ДДНФ. Наприклад,

$$\begin{aligned} F = x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 &= x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot (x_3 + \bar{x}_3) + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = \\ &= x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 . \end{aligned}$$

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називається КНФ, яка відповідає наступним вимогам:

а) всі диз'юнкції мають один і той самий ранг;

б) немає двох однакових диз'юнкцій;

в) жодна з диз'юнкцій не містить двох однакових доданків;

г) жодна з диз'юнкцій не містить змінну разом з її запереченням.

Ці вимоги задовольняє, наприклад, логічна функція

$$F(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + \bar{x}_3) \cdot (\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3),$$

тому вона є прикладом ДКНФ.

Кожна логічна функція має єдину досконалу диз'юнктивну нормальну форму і єдину досконалу кон'юнктивну нормальну форму.

ДДНФ логічної функції містить рівно стільки доданків-кон'юнкцій (їх називають термами), скільки одиниць містить таблиця істинності цієї функції. Кожному одиничному набору змінних x_1, x_2, …, x_n (набору, на якому формула набуває одиничного значення) відповідає кон'юнкція всіх змінних, в якій x_i взяте із запереченням, якщо $x_i = 0$, і без заперечення, якщо $x_i = 1$. Таким чином, існує взаємно однозначна відповідність між таблицею істинності функції та її ДДНФ, і, отже, ДДНФ для всякої логічної функції є єдиною. Аналогічно ДКНФ для будь-якої логічної функції єдина.

Досконалі нормальні форми для даної логічної функції створюють за допомогою її таблиці істинності. Побудова ДДНФ здійснюється відповідно до наступного алгоритму:

1) для кожного рядка таблиці істинності, в якому значення функції дорівнює одиниці, записують кон’юнкцію – логічний добуток змінних, що мають одиничне значення в цьому рядку, і заперечень тих змінних, які в даному рядку мають нульове значення;
2) складають ДДНФ у виді логічної суми створених кон'юнкцій.

Певною мірою аналогічний алгоритм застосовується при побудові ДКНФ:

1) для кожного рядка таблиці істинності, в якому значення функції дорівнює нулю, записують диз'юнкцію – логічну суму змінних, що мають нульове значення в цьому рядку, і заперечень тих змінних, які в даному рядку мають одиничне значення;
2) складають ДКНФ у виді логічного добутку створених диз'юнкцій.

Приклад 8.1. Нехай логічну функцію $F(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності (див. табл. 8.1). Скласти для цієї функції досконалі диз'юнктивну та кон'юнктивну форми.

Таблиця 8.1

№ рядка	x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Розв'язок. Для складання ДДНФ беремо до уваги рядки 1,2,4 і 7. У першому рядку $F=1$ при $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=1$. Тому відповідний доданок ДДНФ має вигляд $F_1=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$. Аналогічно з другого, четвертого й сьомого рядків отримаємо наступні доданки: $F_2=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$, $F_4=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $F_7=x_1x_2x_3$. Отже, ДДНФ буде сумою цих доданків:

$$F_{\text{ДДНФ}}=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_2x_3.$$

Для складання ДКНФ врахуємо рядки 0,3,5 і 6. У нульовому рядку $F=0$ при $x_1=0,\ x_2=0,\ x_3=0$. Тому матимемо відповідний множник ДКНФ у вигляді $F_0=x_1+x_2+x_3$. Аналогічно третій, п'ятий і шостий рядки дають наступні множники: $F_3=x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3$, $F_5=\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3$, $F_6=\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3$. Після цього запишемо ДКНФ у вигляді добутку отриманих таким чином множників:

$$F_{\text{ДКНФ}}=(x_1+x_2+x_3)(x_1+\bar{x}_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+x_2+\bar{x}_3)(\bar{x}_1+\bar{x}_2+x_3).$$