Алгебра Жегалкіна

Алгебра над множиною логічних функцій з двома бінарними операціями $\wedge$ і $\oplus$ називається алгеброю Жегалкіна. Вказаним операціям притаманні наступні властивості:

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz;$$

$$x \oplus x = 0;$$

$$x \oplus 0 = x.$$

Зазначимо можливість виразити заперечення та диз’юнкцію за допомогою операцій $\wedge$ і $\oplus$:

$$\bar{x} = x \oplus 1,$$

$$x + y = xy \oplus x \oplus y$$

(останню формулу пояснюють такі перетворення:

$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y).$$

Ця можливість свідчить про те, що система функцій ($xy,\ x \oplus y$), на який ґрунтується алгебра Жегалкіна, є функціонально повною системою.

Якщо у довільній формулі алгебри Жегалкіна, яка представляє певну логічну функцію, розкрити дужки та здійснити всі можливі спрощення, отримана таким чином формула матиме вигляд суми добутків, тобто полінома за модулем 2. Цей поліном називається поліномом Жегалкіна даної функції.

Приклад 10.1. Функцію $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(\bar{x}_2 + x_1 x_3)$ представити у виді полінома Жегалкіна.

Розв’язання. Розкриваючи в даній функції дужки й враховуючи закони алгебри логіки, властивості операцій алгебри Жегалкіна та формули, які через ці операції виражають заперечення й диз’юнкцію, матимемо:

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)=x_1\bar{x}_2+x_1x_1x_3+x_2\bar{x}_2+x_1x_2x_3=x_1\bar{x}_2+x_1x_3+x_1x_2x_3=\\
&\quad=(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)+x_1x_2x_3=\\
&\quad=(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)x_1x_2x_3\oplus(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)\oplus x_1x_2x_3=\\
&\quad=x_1x_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3=\\
&\quad=x_1(x_2\oplus 1)x_3\oplus x_1(x_2\oplus 1)\oplus x_1x_3=x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus x_1x_3=\\
&\quad=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\,.
\end{aligned}
$$

Таким чином, поліном Жегалкіна для даної функції має вигляд

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3\,.$$

Теорема 10.1. Для всякої логічної функції існує поліном Жегалкіна й притім єдиний.

Доведення. Існування вказаного полінома випливає із зазначеної вище можливості шляхом певних перетворень отримати для даної функції формулу, яка буде представлена у виді суми ($\oplus$) добутків ($\wedge$). Для доказу одиничності покажемо, що між множиною всіх функцій від n змінних і множиною всіх поліномів Жегалкіна від n змінних існує взаємно однозначна відповідність. Число різних членів (тобто кон’юнкцій змінних) поліномів від n змінних дорівнює числу всіх підмножин з n елементів, тобто 2^n (порожній підмножині відповідає член 1). Число різних поліномів, які можна створити з цих кон’юнкцій, дорівнює числу всіх підмножин множини кон’юнкцій, тобто 2^{n^n} (порожній підмножині кон’юнкцій відповідає поліном 0). Таким чином, число всіх поліномів Жегалкіна від n змінних дорівнює числу всіх логічних функцій від n змінних. Оскільки різним функціям відповідають різні поліноми (одна й та сама формула не може представляти дві різні функції), те тим самим між множиною логічних функцій і множиною поліномів від n змінних встановлено взаємно однозначну відповідність, що й доводить одиничність полінома для кожної функції.

Крім способу побудови полінома Жегалкіна, який був розглянутий у прикладі 10.1, поліном може бути створений в інший спосіб – за методом невизначених коефіцієнтів. Основою застосування цього методу є загальний вид полінома; для функції двох змінних це

$$f(x_1, x_2) = A_0 \oplus A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \oplus A_3 x_1 x_2, \quad (10.1)$$

для функції трьох змінних –

$$f(x_1, x_2, x_3) = A_0 \oplus A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \oplus A_3 x_3 \oplus A_4 x_1 x_2 \oplus \\ \oplus A_5 x_1 x_3 \oplus A_6 x_2 x_3 \oplus A_7 x_1 x_2 x_3 \quad (10.2)$$

і т.д. Щоб знайти значення коефіцієнтів A_0, A_1, A_2, …, для даної функції заповнюється таблиця істинності, яка дозволяє скласти відповідну кількість рівнянь (чотири для функції двох змінних, вісім – для функції трьох змінних і т.д.), що містять зазначені коефіцієнти як невідомі величини. Розв'язуючи систему цих рівнянь, визначаємо коефіцієнти (їхні можливі значення – 0 і 1) та записуємо поліном.

Приклад 10.2. Використовуючи метод невизначених коефіцієнтів, записати поліном Жегалкіна для функції $f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$.

Розв'язання. У відповідності до кожного набору значень x_1 і x_2, що наведені у таблиці істинності даної функції (табл. 10.1), підставивши значення аргументів x_1 і x_2 та функції $x_1 \to x_2$ у рівність (10.1), дістанемо 4 рівняння, з яких послідовно знайдемо значення коефіцієнтів A_0, A_1, A_2, A_3:

Таблиця 10.1

x_1	x_2	$x_1 \to x_2$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

$$f(0,0) = 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0;\ A_0 = 1;$$

$$f(0,1) = 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 0;\ A_2 = 0;$$

$$f(1,0) = 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0;\ A_1 = 1;$$

$$f(1,1) = 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1;\ A_3 = 1.$$

Таким чином, поліном Жегалкіна для функції $f_{13}(x_1, x_2)$ матиме вигляд

$$f_{13}(x_1, x_2) = x_1 \to x_2 = 1 \oplus x_1 \oplus x_1 x_2.$$

Приклад 10.3. Функцію $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)$ представити у виді полінома Жегалкіна, використовуючи для цього метод невизначених коефіцієнтів.

Розв'язання. Складемо таблицю істинності вказаної функції (табл. 10.2).

Таблиця 10.2

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_2$	x_1+x_2	x_1x_3		f
0	0	0	1	0	0	1	0
0	0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	0	1	0	0	0
0	1	1	0	1	0	0	0
1	0	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	0	1	1	1	1

Підставивши значення аргументів x_1,x_2,x_3 і заданої функції $f(x_1,x_2,x_3)$ у рівність (10.2), дістанемо систему 8 рівнянь

$$\begin{cases}
0=A_0\oplus A_1\cdot 0\oplus A_2\cdot 0\oplus A_3\cdot 0\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
0=A_0\oplus A_1\cdot 0\oplus A_2\cdot 0\oplus A_3\cdot 1\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
0=A_0\oplus A_1\cdot 0\oplus A_2\cdot 1\oplus A_3\cdot 0\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
0=A_0\oplus A_1\cdot 0\oplus A_2\cdot 1\oplus A_3\cdot 1\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 1\oplus A_7\cdot 0;\\
1=A_0\oplus A_1\cdot 1\oplus A_2\cdot 0\oplus A_3\cdot 0\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
1=A_0\oplus A_1\cdot 1\oplus A_2\cdot 0\oplus A_3\cdot 1\oplus A_4\cdot 0\oplus A_5\cdot 1\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
0=A_0\oplus A_1\cdot 1\oplus A_2\cdot 1\oplus A_3\cdot 0\oplus A_4\cdot 1\oplus A_5\cdot 0\oplus A_6\cdot 0\oplus A_7\cdot 0;\\
1=A_0\oplus A_1\cdot 1\oplus A_2\cdot 1\oplus A_3\cdot 1\oplus A_4\cdot 1\oplus A_5\cdot 1\oplus A_6\cdot 1\oplus A_7\cdot 1.
\end{cases}$$

Рівняння цієї системи розв'язуємо послідовно, починаючи з першого:

$A_0=0;$

$A_3\cdot 1=0;\qquad A_3=0;$

$A_2\cdot 1=0;\qquad A_2=0;$

$A_2\cdot 1\oplus A_3\cdot 1\oplus A_6\cdot 1=0;\qquad A_6\cdot 1=0;\qquad A_6=0;$

$A_1\cdot 1=1;\qquad A_1=1;$

$A_1\cdot 1\oplus A_3\cdot 1\oplus A_5\cdot 1=1;\qquad 1\oplus A_5\cdot 1=1;\qquad A_5=0;$

$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0$; $1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0$; $A_4 = 1$;

$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1$; $1 \oplus 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1$;

$A_7 = 1$.

Після підстановки значень знайдених коефіцієнтів у (10.2) маємо наступний вигляд полінома Жегалкіна:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$

(порівн. з результатом прикладу 10.1).