Функціонально повні системи функцій

Систему логічних функцій називають *функціонально повною*, якщо будь-яку логічну функцію можна виразити у вигляді формули, яка е суперпозицією функцій цієї системи.

З урахуванням того, що сказано вище про досконалі нормальні форми, система логічних функцій $\bar{x}$, $x_1 \cdot x_2$ і $x_1 + x_2$, яка визначається системою трьох основних логічних операцій ($\neg$, $\wedge, \vee$), є функціонально повною системою. Так само функціонально повною буде кожна система, через функції якої можна виразити заперечення, кон'юнкцію та диз'юнкцію.

Функціонально повна система, з якої не можна виключити жодної функції, називається *незвідною***.**

Враховуючи закони де Моргана, можна стверджувати, що система операцій ($\neg$, $\wedge, \vee$) не визначає незвідну систему функцій, бо з неї можна виключати по черзі кон'юнкцію або диз'юнкцію і записувати відповідні формули з використанням пар операцій ($\neg$, $\vee$) або ($\neg$, $\wedge$). Щодо систем логічних операцій ($\neg$, $\vee$) і ($\neg$, $\wedge$), те вони визначають функціонально повні та незвідні системи функцій.

Так само функціонально повною та незвідною системою логічних функцій є система, яка відповідає парі операцій ($\neg$, $\rightarrow$). Це легко підтвердити, якщо через вказані операції виразити функції повної системи $\bar{x}$, $x_1 \cdot x_2$ і $x_1 + x_2$:

$$\bar{x} = x \rightarrow 0;$$

$$x_1 + x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1 \rightarrow \bar{x}_2}\,.$$

Аналогічно доводиться, що системи, створені поодинці функцією $x_1 \downarrow x_2$ (стрілка Пірса) і функцією $x_1 \mid x_2$ (штрих Шеффера), – кожна з них є функціонально повною (і, звичайно, незвідною) системою. Для стрілки Пірса маємо:

$$\bar{x} = \bar{x} \cdot \bar{x} = \overline{x + x} = x \downarrow x;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2 = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2);$$

$$x_1 + x_2 = \overline{\overline{x_1 + x_2}} = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$$

і для штриха Шеффера:

$$\bar{x} = x \mid x;$$

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{x_1 \mid x_2} = (x_1 \mid x_2) \mid (x_1 \mid x_2);$$

$$x_1 + x_2 = \overline{\bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \mid \bar{x}_2 = (x_1 \mid x_1) \mid (x_2 \mid x_2).$$

Ще одним прикладом функціонально повної системи функцій є система, побудована на базі операцій ($\wedge, \oplus$). Алгебру логіки, побудовану з використанням системи операцій ($\wedge, \oplus$), називають алгеброю Жегалкіна.