Формули алгебри логіки. Тавтології

При складанні логічного висловлення з кількох простих висловлень використовується принцип суперпозиції, тобто підстановка у функцію замість її аргументів інших функцій. Таким чином, як і в елементарній алгебрі, в алгебрі логіки, виходячи з елементарних функцій, можна створювати їхню суперпозицію. Таку суперпозицію реалізують за допомогою логічних формул. Формулою в алгебрі логіки називають вираз, який містить символи операндів (окремих змінних), знаки логічних операцій та дужки, що встановлюють певний порядок здійснення операцій. Зазначимо, що при відсутності дужок операції здійснюються у порядку зменшення пріоритету; при цьому найвищий пріоритет має інверсія, після неї йде кон'юнкція, потім усі інші операції у порядку їхнього запису зліва направо.

На відміну від табличного способу завдання логічної функції, представлення її формулою не є єдиним. Так, наприклад, усі 4 формули, які містить співвідношення (5.3),

$F_1 = x \sim y$, $F_2 = (x \to y) \cdot (y \to x)$, $F_3 = (\bar{x} + y) \cdot (\bar{y} + x)$, $F_4 = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}$,

представляють одну й ту саму функцію f_9.

Формули $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називаються *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що входять у ці формули, вони набувають однакових значень. Еквівалентність формул позначається знаком рівності. Перевірка еквівалентності формул здійснюється шляхом побудови для кожної формули її таблиці істинності. Якщо побудовані таблиці однакові, значить формули еквівалентні – саме в такий спосіб у п.7 доведено еквівалентності (5.2) і (5.3). У наведеному вище прикладі маємо $F_1 = F_2 = F_3 = F_4$ (тобто всі 4 формули є еквівалентними).

Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *тотожно істинною* або *тавтологією*, якщо її значення дорівнює 1 при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Приклади тавтологій: $x \vee \bar{x}$, $x \to (y \to x)$.

Легко упевнитися в тому, що дві формули $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ еквівалентні тоді й тільки тоді, коли формула $F \sim H$ є тавтологією.

Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *тотожно хибною* або *суперечливою*, якщо її значення дорівнює 0 при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Приклади: $x \wedge \bar{x}$, $(x \oplus y) \wedge (x \downarrow y)$.

Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *здійсненною* або *нейтральною*, якщо вона не є ні тотожно істинною, ні тотожно хибною.

Завдання побудови єдиного алгоритму, який дає змогу для кожної формули з'ясувати, чи є вона здійсненною, називається проблемою *розв'язуваності*.

Одним із шляхів вирішення цієї задачі є побудова таблиці істинності для формули. Цей спосіб, звичайно, дає принципове вирішення проблеми розв'язуваності, але при великій кількості змінних він практично нездійсненний через величезне число можливих наборів значень змінних.

Закони алгебри логіки. Принцип двоїстості. Функціонально повні системи функцій

Відображенням еквівалентності логічних формул є закони алгебри логіки, які зведені у наступну таблицю (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Назва закона	Диз'юнкція	Кон'юнкція
Комутативність	$x+y=y+x$	$x\cdot y=y\cdot x$
Асоціативність	$x+(y+z)=(x+y)+z$	$x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z$
Дистрибутивність	$x+y\cdot z=(x+y)\cdot(x+z)$	$x\cdot(y+z)=x\cdot y+x\cdot z$
Інверсія (закон де Моргана)	$\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y}$	$\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y}$
Ідемпотентність (самопоглинання)	$x+x=x$ $x+0=x$ $x+1=1$	$x\cdot x=x$ $x\cdot 0=0$ $x\cdot 1=x$
Закон виключеного третього	$x+\bar{x}=1$	
Закон протиріччя		$x\cdot\bar{x}=0$
Закон подвійного заперечення	$\overline{\overline{x}}=x$	
Закони поглинання	$x+x\cdot y=x$	$x\cdot(x+y)=x$

Звернемо увагу на те, що в числовій алгебрі існують закони комутативності та асоціативності суми й добутку, а також дистрибутивності добутку, які аналогічні наведеним вище. Щодо закону дистрибутивності суми, те він притаманний тільки логічній сумі; для числової суми, як відомо, подібний закон не має місця.

Закон де Моргана може бути подано в іншому вигляді, якщо обидві частини рівностей, які є змістом цього закону, замінити на їхні заперечення, після чого скористатися законом подвійного заперечення. Тоді матимемо

$x+y=\overline{\bar{x}\cdot\bar{y}}$ для диз'юнкції та $x\cdot y=\overline{\bar{x}+\bar{y}}$ для кон'юнкції.

Використовуючи закон виключеного третього та закон протиріччя разом із законами ідемпотентності, зробимо два дуже важливі висновки:

1) Якщо логічна сума містить хоча б одну пару доданків, які є взаємно інверсними величинами, те така сума буде тотожно істинною:

$$M + Q + L + \overline{Q} \equiv 1.$$

2) Якщо логічний добуток містить хоча б одну пару множників, які є взаємно інверсними величинами, те такий добуток буде тотожно хибним:

$$M \cdot Q \cdot L \cdot \overline{Q} \equiv 0.$$

Доведемо зараз деякі співвідношення, що були наведені раніше.

Еквівалентність формул, які створюють перше зі співвідношень (5.2), перевіримо за допомогою таблиць істинності функції $f_{13} = x \to y$ (див. табл. 5.1) і функції $\overline{x} + y$:

Таблиця 7.2

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} + y$	$f_{13} = x \to y$
0	0	1	1	1
0	1	1	1	1
1	0	0	0	0
1	1	0	1	1

Друге співвідношення (5.2) перевіряється аналогічно.

Рівність $x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x)$ у співвідношенні (5.3) перевіряємо так само, порівнюючи відповідні таблиці істинності:

Таблиця 7.3

x	y	$x \to y$	$y \to x$	$(x \to y) \cdot (y \to x)$	$x \sim y$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Доведена рівність

$$x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x)$$

вважається ще одним означенням еквівалентності x і y: логічні величини x і y еквівалентні тоді й тільки тоді, коли з x випливає y і з y випливає x.

Використовуючи, далі, співвідношення (5.2) та закон дистрибутивності добутку і потім закон протиріччя, для функції f_9 маємо

$$x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x) =$$
$$= (\bar{x} + y) \cdot (\bar{y} + x) = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot x + y \cdot \bar{y} + x \cdot y = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}.$$

Враховуючи взаємну інверсію функцій f_6 і f_9 та застосовуючи двічі закон де Моргана до останньої формули співвідношень (5.3), для функції f_6 отримуємо останню формулу зі співвідношень (5.4):

$$x \oplus y = \overline{x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}} = (\overline{x \cdot y}) \cdot (\overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}) = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}),$$

після чого, користуючись дистрибутивністю добутку й законом протиріччя, матимемо для f_6 ще одну формулу:

$$x \oplus y = x \cdot \bar{x} + x \cdot \bar{y} + y \cdot \bar{x} + y \cdot \bar{y} = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y.$$

Справжність співвідношень (5.5) і (5.6) безпосереднє випливає з означення функцій $x \downarrow y$ (стрілки Пірса) і $x \mid y$ (штриха Шеффера), як інверсій диз'юнкції та кон'юнкції, після застосування до них закону де Моргана.

Функція $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *двоїстою* до функції $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, якщо $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{f}_2(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. Інвертування обох частин цієї рівності й заміна аргументів $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на їхні заперечення $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ приводить до наступного висновку: $\bar{f}_1(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n) = \bar{\bar{f}}_2(\bar{\bar{x}}_1, \bar{\bar{x}}_2, \ldots, \bar{\bar{x}}_n) = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, тобто функція f_2 двоїста до f_1; інакше кажучи, відношення двоїстості між функціями є симетричним.

Таблиця істинності для двоїстої функції $f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ випливає з таблиці істинності функції $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ інвертуванням в кожному рядку (заміною 0 на 1 та 1 на 0) значень функції й заміною на протилежний порядку розташування інвертованих значень функції у стовпці (табл. 7.4).

Таблиця 7.4

x_1	x_2	x_3	f	f^*
0	0	0	0	1
0	0	1	1	1
0	1	0	1	1
0	1	1	0	0
1	0	0	1	1

1	0	1	0	0
1	1	0	0	0
1	1	1	0	1

Наведемо деякі приклади двоїстості:

1) функція 0 двоїста до 1 ;
2) функція 1 двоїста до 0 ;
3) функція x двоїста до $\bar{x}$;
4) функція $\bar{x}$ двоїста до x ;
5) функція x_1x_2 двоїста до x_1+x_2 ;
6) функція x_1+x_2 двоїста до x_1x_2 .

Відзначимо, що взаємна двоїстість кон'юнкції й диз'юнкції, яку ми бачимо відповідно до прикладів 5 і 6, безпосереднє випливає із законів де Моргана.

На підставі означення двоїстості можна сформулювати наступне твердження, яке називають *принципом двоїстості*: якщо у формулі F, яка представляє функцію f, всі кон'юнкції замінити на диз'юнкції, диз'юнкції – на кон'юнкції, 1 на 0, 0 на 1, а також усі інші аргументи формули на їхні заперечення, те отримана таким чином нова формула F^* представлятиме функцію f^*, двоїсту до функції f.