Основні поняття математичної логіки

Основи математичної логіки закладено в працях англійського математика Джорджа Буля (1815-1864), де він уперше виклав алгебру логіки – алгебру Буля. Дж. Буль запропонував у формулах позначати літерами висловлення, які розглядаються не за їхнім змістом або значенням, а тільки з точки зору того, істинні вони чи хибні.

Висловлення (або *судження*) – це деяке твердження, яке має вигляд розповідного речення й яке є істинним або хибним. Наприклад:

- ✓ "Київ – місто на Дніпрі", "Сонце сходить уранці" – істинні висловлення;
- ✓ "Лондон – столиця Франції", "Африка – великий острів" – хибні висловлення;
- ✓ речення "Як вас звати ?", "Прочитайте цю книгу" не є висловленнями.

Уведемо до розгляду двоелементну множину $B = \{0, 1\}$, і число

$$\alpha(P) = \begin{cases} 1, & \text{якщо } P \text{ істинне}, \\ 0, & \text{якщо } P \text{ хибне}, \end{cases} \qquad (5.1)$$

назвемо значенням істинності висловлення P. Основою математичної логіки служить алгебра логіки, яка є алгеброю, утвореною множиною B зі всіма можливими операціями на ній. Серед цих операцій виділимо наступні п'ять основних (див. табл. 5.1).

Таблиця 5.1

P	Q	$\overline{P}$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \to Q$	$P \sim Q$
0	0	1	0	0	1	1
0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	0	1	0	0
1	1	0	1	1	1	1

Заперечення (*інверсія*) висловлення P – висловлення $\overline{P}$ ($\neg P$, "не P"), яке істинне тоді й тільки тоді, коли P хибне.

Кон'юнкція (*логічне множення*) висловлень P і Q – висловлення $P \cdot Q$ ($P \wedge Q$, "P і Q"), яке істинне тоді й тільки тоді, коли істинні обидва висловлення P і Q.

Диз'юнкція (*логічне додавання*) висловлень P і Q – висловлення $P + Q$ ($P \vee Q$, "P або Q"), яке істинне тоді й тільки тоді, коли істинне хоча б одне з висловлень P і Q (або обидва).

Імплікація висловлень P і Q – висловлення $P \to Q$ ($P \Rightarrow Q$, "з P випливає Q", або "якщо P, те Q"), яке хибне тоді й тільки тоді, коли P істинне, а Q хибне. Про результати, які визначає ця операція, говорять, що з хибності може випливати що завгодно, а з істини – тільки істина.

Еквівалентність (*рівнозначність*) висловлень P і Q – висловлення $P \sim Q$ ($P \Leftrightarrow Q$, "P еквівалентне Q", або "P тоді й тільки тоді, коли Q"), яке істинне тоді й тільки тоді, коли P і Q мають одне й те саме значення істинності (обидва істинні або обидва хибні).

З простих висловлень за допомогою логічних операцій створюються складені висловлення.

Формалізованим представленням простих і складених висловлень є логічні функції. *Логічною* (*булевою*, *перемикальною*) *функцією* $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називають функцію, яка разом з її n аргументами може набувати лише двох значень: 0 або 1.

Областю визначення логічної функції n аргументів є сукупність 2^n булевих наборів значень її аргументів. Логічна функція двох аргументів є повністю визначеною, якщо задано її значення в кожному з чотирьох можливих наборів ($2^2 = 4$); логічна функція трьох аргументів буде також повністю визначеною, коли задано її значення у восьми ($2^3 = 8$) наборах.

Існує три способи задання логічної функції: вербальний (словесний), аналітичний і табличний. Аналітичне задання функції – опис її аналітичним виразом (формулою). Наприклад $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 x_2 + x_3$. Табличний спосіб задання функції полягає в представленні для неї таблиці істинності, в якій для кожного можливого набору значень аргументів вказують відповідні значення функції (табл.5.2). При цьому набори, для яких значення функції дорівнює 1, називають одиничними.

Таблиця 5.2

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	0

Існує 4 логічні функції однієї змінної. Загальна таблиця змісту і значень цих функцій має вигляд табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Позначення функції	Найменування функції	$x = 0$	$x = 1$
$f_0(x)=0$	Константа 0	0	0
$f_1(x)=x$	Повторення аргументу x	0	1
$f_2(x)=\bar{x}$	Інверсія x (заперечення x, НЕ x)	1	0
$f_3(x)=1$	Константа 1	1	1

Загальна таблиця змісту і значень для логічних функцій двох змінних (їх існує 16) має вигляд табл. 5.4.

Деякі зазначені у цій таблиці функції підпорядковані певним важливим співвідношенням. Серед них зупинимося на наступних (їхнє доведення буде зроблене нижче).

Таблиця 5.4

Позначення функції	Найменування Функції	x			
		0	0	1	1
		y			
		0	1	0	1
$f_0(x,y)=0$	Константа 0	0	0	0	0
$f_1(x,y)=x\wedge y=xy=x\,\&\,y$	Кон'юнкція (логічне множення)	0	0	0	1
$f_2(x,y)=x\nabla y=\overline{x\to y}$	Інверсія імплікації (від x до y)	0	0	1	0
$f_3(x,y)=x$	Повторення x (змінна x)	0	0	1	1
$f_4(x,y)=y\nabla x=\overline{x\leftarrow y}$	Інверсія оберненої імплікації (від y до x)	0	1	0	0
$f_5(x,y)=y$	Повторення y (змінна y)	0	1	0	1
$f_6(x,y)=x\oplus y=\overline{x\sim y}$	Нерівносильність (сума за модулем 2)	0	1	1	0
$f_7(x,y)=x\vee y=x+y$	Диз'юнкція (логічне додавання)	0	1	1	1
$f_8(x,y)=x\downarrow y=\overline{x\vee y}$	Стрілка Пірса (інверсія диз'юнкції)	1	0	0	0
$f_9(x,y)=x\sim y$	Еквівалентність (рівносильність)	1	0	0	1
$f_{10}(x,y)=\bar{y}$	Інверсія y (заперечення y, НЕ y)	1	0	1	0
$f_{11}(x,y)=x\leftarrow y$	Обернена імплікація (від y до x)	1	0	1	1
$f_{12}(x,y)=\bar{x}$	Інверсія x (заперечення x, НЕ x)	1	1	0	0
$f_{13}(x,y)=x\to y$	Імплікація (від x до y)	1	1	0	1
$f_{14}(x,y)=x\,|\,y=\overline{x\wedge y}$	Штрих Шеффера (інверсія кон'юнкції)	1	1	1	0
$f_{15}(x,y)=1$	Константа 1	1	1	1	1

$$f_{13}(x,y)=x\to y=\bar{x}+y;\;\; f_{11}(x,y)=y\to x=\bar{y}+x. \quad (5.2)$$

$$f_9(x,y)=x\sim y=(x\to y)\cdot(y\to x)=(\bar{x}+y)\cdot(\bar{y}+x)=x\cdot y+\bar{x}\cdot\bar{y}. \quad (5.3)$$

$$f_6(x,y)=x\oplus y=\overline{x\sim y}=x\cdot\bar{y}+\bar{x}\cdot y=(x+y)\cdot(\bar{x}+\bar{y}) \quad (5.4)$$

(підкреслимо, що функція f_6 є інверсією еквівалентності; крім зазначених у таблиці назв, її називають також "виключна диз'юнкція" на відміну від функції f_7, яка є "невиключною диз'юнкцією").

$$f_8(x,y)=x\downarrow y=\overline{x+y}=\bar{x}\cdot\bar{y} \quad (5.5)$$

(вираз $x\downarrow y$ читають "ні x, ні y"; він є істинним тоді, коли x і y одночасно хибні).

$$f_{14}(x,y)=x\,|\,y=\overline{x\cdot y}=\bar{x}+\bar{y} \quad (5.6)$$

(вираз $x\,|\,y$ читають "x не сумісне з y"; він є хибним тоді, коли x і y одночасно істинні).