Лр№9. Мінімізація ДНФ – метод Квайна–МакКласкі

За методом Квайна, виходячи з відомої ДДНФ запропонованої до мінімізації функції, здійснюють в ній усі можливі склеювання термів-кон'юнкцій, внаслідок чого утворюються кон'юнкції-імпліканти $(n-1)$-го рангу. Потім проводять можливі склеювання отриманих імплікант $(n-1)$-го рангу, щоб дістати імпліканти $(n-2)$-го рангу, і т.д. Після завершення етапу визначення імплікант в створеному наборі треба залишити тільки прості імпліканти. Продовження роботи з ними зводиться до побудови та аналізу так званої імплікантної матриці. Стовпці цієї матриці відповідатимуть термам ДДНФ, а рядки – зазначеним імплікантам. Робота з цією матрицею складається з наступних етапів.

1) Імплікантна матриця заповнюється мітками відповідно наступному правилу: по кожному рядку (по кожній імпліканті) мітку ставлять у тих стовпцях (у відповідності тому терму ДДНФ), де імпліканта входить до цього терму. Проставлена у певній клітині імплікантної матриці мітка означає покриття даною імплікантою відповідного терму ДДНФ.

2) Якщо в якому-небудь із стовпців імплікантної матриці існує тільки одна мітка, то імпліканта, яка породжує цю мітку, називається суттєвою. Вона не може бути проігнорована при запису мінімальної ДНФ і стає обов’язковим її доданком, оскільки без неї не буде покриття всієї множини термів заданої ДДНФ. В імплікантній матриці закреслюють рядки, які відповідають суттєвим імплікантам, і стовпці термів, які покриваються цими імплікантами. Замість закреслювання можливе також вилучення зазначених рядків та стовпців і перехід до розгляду спрощеної матриці.

3) Якщо в одержаній після попереднього етапу є два стовпці з мітками в однакових рядках, то один з них закреслюють. Це можна зробити завдяки тому, що покриття виключеного терму, здійснюється покриттям стовпця, який залишився.

4) Якщо після закреслювання деяких зайвих стовпців на попередньому етапі в таблиці з'являються рядки, в яких немає жодної мітки, то імпліканти, які відповідають цим рядкам, виключаються, оскільки вони не покривають жодного терму з тих, що залишилися.

5) В одержаній таблиці вибирають таку сукупність імплікант, яка забезпечує покриття всіх термів, які на цьому етапі залишилися. При кількох можливих варіантах такого вибору перевага віддається варіанту покриття, який відповідає вимозі мінімальності побудованої форми з урахуванням прийнятого коефіцієнта простоти.

МакКласкі запропонував модернізацію першого етапу методу Квайна, яка істотно спрощує процес порівняння термів. Ідея МакКласкі полягає в наступному. Якщо записати терми у вигляді їхніх двійкових еквівалентів, то всі відповідні двійкові значення (а разом з ними і всі терми ДДНФ) можна розбити за числом одиниць у цих значеннях на неперетинні групи. При цьому в i-ту групу ввійдуть усі терми, що мають у своєму двійковому запису i одиниць. Попарно порівнювати можна тільки сусідні за номером групи, оскільки саме вони містять терми, які відрізняються один від одного тільки в одному розряді. При створенні імплікант у розряді, що відповідає вилученій під час склеювання термів змінній, записують прочерк (у вигляді тире, дефіса або символу підкреслення). Така модифікація на практиці дуже зручна, оскільки дає змогу уникнути виписування громіздких термів та імплікант, замінюючи їх відповідними двійковими числами.

2.6.01. Функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ у виді її ДДНФ задано термами з наступними десятковими еквівалентами їхнього двійкового подання: 0,1,5,7,8,9,11,12,15 (інакше кажучи, для даної функції в її векторному поданні координати зі вказаними номерами дорівнюють одиниці, а координати з номерами 2,3,4,6,10,13,14 дорівнюють нулю). Застосувавши метод Квайна–МакКласкі, знайти мінімальну ДНФ даної функції.

<u>Розв'язання.</u> Запишемо дані терми по групах у двійковому коді:

Нульова група 0000

Перша група 0001, 1000

Друга група 0101, 1001, 1100

Третя група 0111, 1011

Четверта група 1111

Порівнюючи терми сусідніх груп, визначаємо по групах імпліканти третього рангу:

Нульова група 000–, –000

Перша група 0–01, –001, 100–, 1–00

Друга група 01–1, 10–1

Третя група –111, 1–11

Далі, порівнюючи таким же самим чином отримані імпліканти одну з одною, знаходимо імпліканту другого рангу:

Нульова група –00–

Складаємо імплікантну матрицю (табл. 2.9). Виділивши суттєві імпліканти 1–00 і –00– ($x_1\bar{x}_3\bar{x}_4$ і $\bar{x}_2\bar{x}_3$), вилучивши стовпці покритих ними термів (0000, 0001, 1000, 1001, 1100) та переходячи до розгляду спрощеної матриці (табл. 2.10), з'ясовуємо, що мінімальне покриття термів, що залишилися, здійснюється сукупністю імплікант 01–1 і 1–11 ($\bar{x}_1x_2x_4$ і $x_1x_3x_4$).

Таблиця 2.9

	0000	0001	0101	0111	1000	1001	1011	1100	1111
0–01		*	*						
1–00					*			*	
01–1			*	*					
10–1						*	*		
–111				*					*
1–11							*		*
–00–	*	*			*	*			

Таблиця 2.10

	0101	0111	1011	1111
0–01	*			
01–1	*	*		
10–1			*	
–111		*		*
1–11			*	*

Таким чином, для ДНФ, що розглядається, мінімальна форма має наступний вигляд:

$$f_{\min} = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_3x_4 + x_1\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_4\,. \qquad \square$$

У задачах 2.6.01 – 2.6.25 булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задано у вигляді ДДНФ, мінтерми якої мають відповідні двійкові еквіваленти, що подані послідовністю їхніх десяткових значень (як зазначено в 2.6.01, у векторному поданні даних функцій координати зі вказаними в послідовності номерами дорівнюють одиниці). Мінімізувати функцію за методом Квайна–МакКласкі.

2.6.01. {1, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 14}.

2.6.02. {1, 3, 7, 9, 10, 12, 13, 14, 15}.

2.6.03. {0, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14}.

2.6.04. {2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 13}.

2.6.05. {1, 2, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 15}.

2.6.06. {1, 2, 3, 4, 5, 6,10, 11, 13, 15}.

2.6.07. {2, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}.

2.6.08. {5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14}.

2.6.09. {1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15}.

2.6.10. {0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 13}.

2.6.11. {0, 2, 3, 4, 5, 6, 13, 14, 15}.

2.6.12. {0, 2, 3, 4, 5, 7, 11, 12, 14, 15}.

2.6.13. {0, 1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 13, 15}.

2.6.14. {1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 15}.

2.6.15. {0, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 13, 15}.

2.6.16. {0, 1, 2, 5, 7, 8, 10, 12, 14, 15}.

2.6.17. {2, 3, 5, 6, 11, 12, 13, 14, 15}.

2.6.18. {1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 12, 13, 14}.

2.6.19. {0, 1, 2, 3, 5, 8, 10, 13, 14, 15}.

2.6.20. {0, 1, 3, 8, 9, 10, 13, 14, 15}.

2.6.21. {0, 1, 2, 5, 6, 7, 10, 11, 13, 15}.

2.6.22. {0, 2, 3, 4, 7, 8, 10, 12, 13, 15}.

2.6.23. {4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14}.

2.6.24. {0, 1, 4, 6, 7, 9, 11, 12, 13, 15}.

2.6.25. {1, 3, 4, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 14}.