Лр№8. Мінімізація ДНФ. Застосування діаграм Карно–Вейча

Кожна булева функція може бути подана у вигляді ДНФ багатьма способами, і тому постає питання про вибір такого її подання, яке було б у певному сенсі найпростішим. Цей вибір здійснюють з урахуванням найменшого значення так званого коефіцієнта (індексу) простоти $L(F)$, який характеризує складність ДНФ. Найчастіше зустрічаються наступні три типи коефіцієнтів простоти: 1) $L'(F)$ – число символів змінних в запису ДНФ (враховується кожне входження змінної); 2) $L''(F)$ – число елементарних кон'юнкцій, що входять у ДНФ; 3) $L'''(F)$ – число символів заперечення в запису ДНФ. Якщо, наприклад, задано дві еквівалентні формули $F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3$ і $F_2 = F_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1$, то для цих формул маємо наступні значення зазначених коефіцієнтів простоти:

$$L'(F_1) = 15, \quad L''(F_1) = 5, \quad L'''(F_1) = 7;$$
$$L'(F_2) = 3, \quad L''(F_2) = 2, \quad L'''(F_2) = 3.$$

Порівнюючи наведені значення, робимо висновок про те, що за будь-яким типом коефіцієнта простоти формула F_2 є простішою.

Булеву функцію φ називають *імплікантою* функції *f*, якщо вираз $\varphi \to f$ є тавтологією. Зауважимо наступне: якщо функція φ – імпліканта, вона покриває нулями всі нулі функції *f*, а одиниці функції *f* можуть бути покриті як нулями, так і одиницями функції φ. Про імпліканту φ говорять, що вона входить у функцію *f* .

Власною частиною імпліканти називають кон'юнкцію, здобуту вилученням із неї одного або кількох множників. Наприклад, імпліканта $\bar{x}yz$ має власні частини $\bar{x}y,\ yz,\ \bar{x}z,\ \bar{x},\ y,\ z$. Простою імплікантою булевої функції *f* називається елементарна кон'юнкція, що сама входить у задану функцію, але жодна її власна частина у цю функцію не входить. Диз'юнкція всіх можливих простих імплікант називається скороченою ДНФ булевої функції. ДНФ (в тому числі скорочена) може містити "зайві" імпліканти (тобто такі, вилучення яких є еквівалентне перетворення й не змінює логічного значення формули). Скорочена ДНФ, з якої не можна вилучити жодної імпліканти, називається тупиковою. Саме серед тупикових ДНФ є обов'язково відшукувана мінімальна форма.

Таким чином, загальна схема мінімізації ДНФ передбачає наступні дії: 1) отримання ДДНФ заданої логічної функції; 2) виділення з ДДНФ скороченої ДНФ цієї функції; 3) знаходження всіх тупикових ДНФ заданої функції; 4) вибір серед тупикових ДНФ мінімальної форми з урахуванням прийнятого коефіцієнта простоти.

Перехід від ДДНФ до скороченої ДНФ є найбільш складним пунктом зазначеного алгоритму. Саме способом реалізації цього пункту відрізняються методи мінімізації ДНФ, що існують і що наведені нижче. Вказаний перехід здійснюється за допомогою операцій повного та неповного диз'юнктивного склеювання й поглинання. В операції повного склеювання

$$xy + \bar{x}y = (x + \bar{x})y = y$$

доданки xy і $\bar{x}y$ склеюються за змінною y. На відміну від цього в операції неповного склеювання, приймаючи до уваги закон поглинання ($y = y + xy$, або $y = y + \bar{x}y$), матимемо

$$xy + \bar{x}y = y + xy, \text{ або } xy + \bar{x}y = y + \bar{x}y .$$

Наприклад, ДДНФ функції $f_{13} = x_1 \to x_2$, яку подано формулою $f_{13(\text{ДДНФ})} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2$, перетворюється у скорочену ДНФ наступним чином:

$$f_{13} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) + x_1 x_2 = \bar{x}_1 + x_1 x_2 =$$
$$= \bar{x}_1 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = \bar{x}_1 + (\bar{x}_1 + x_1)x_2 = \bar{x}_1 + x_2 .$$

Одним із способів компактного графоаналітичного подання булевих функцій є діаграми (мінімізаційні карти) Карно–Вейча. На рис. 2.1 показано структуру діаграм Карно–Вейча, що передбачаються для подання ДДНФ функцій двох (***а***), трьох (***б***) і чотирьох (***в***) змінних. Кожній клітині діаграми відповідає певна кон'юнкція змінних або їхніх заперечень; при тому кон’юнкції, розміщені у будь-яких двох сусідніх клітинах, розрізняються тільки одним співмножником. Зауважимо, що, застосовуючи діаграму для функції трьох змінних (рис. 2.1,***б***), її потрібно вважати розгорткою циліндра, розрізаного по стику першого й четвертого стовпців; щодо діаграми, побудованої для функції чотирьох змінних (рис.2.1,***в***), її треба розглядати як розгортку двох циліндрів: вертикального, розрізаного по стику першого й четвертого стовпців, і горизонтального, розрізаного по стику першого й четвертого рядків. Це зауваження дуже важливе при порівнянні співмножників у сусідніх клітинах – клітини, які розташовані по обидва боки від розрізів, також вважаються сусідніми.

	x_1	$\overline{x}_1$
x_2	$x_1 x_2$	$\overline{x}_1 x_2$
$\overline{x}_2$	$x_1 \overline{x}_2$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2$

а

	x_1	x_1	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$
x_2	$x_1 x_2 \overline{x}_3$	$x_1 x_2 x_3$	$\overline{x}_1 x_2 x_3$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3$
$\overline{x}_2$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$	$x_1 \overline{x}_2 x_3$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3$
	$\overline{x}_3$	x_3	x_3	$\overline{x}_3$

б

	x_1	x_1	$\overline{x}_1$	$\overline{x}_1$	
x_2	$x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$x_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_4$
x_2	$x_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$	$x_1 x_2 x_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4$	x_4
$\overline{x}_2$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 x_4$	$\overline{x}_1 x_2 x_3 x_4$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 x_4$	x_4
$\overline{x}_2$	$x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$x_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4$	$\overline{x}_4$
	$\overline{x}_3$	x_3	x_3	$\overline{x}_3$	

в

Рис. 2.1

Діаграму Карно–Вейча для заданої булевої функції заповнюють після побудови ДДНФ цієї функції шляхом запису одиниць у клітинах, які відповідають термам-кон'юнкціям, що входять до ДДНФ. У заповненій таким чином діаграмі об'єднують одиниці, які розташовані в сусідніх клітинах, у прямокутні блоки по 2, 4, 8, 16, … одиниць; при цьому взаємний перетин блоків не виключається, і кожен створений блок повинен об'єднувати максимально можливу кількість одиниць.

Усім можливим наборам значень змінних x_1, x_2, x_3, x_4 поставимо у відповідність чотирьохзначне двійкове число (у ньому в кожному розряді змінній відповідатиме 1, а запереченню змінної – 0), або десятковий еквівалент цього числа. Якщо замінити кожний набір змінних на рис.2.1,***в*** вказаними еквівалентами, отримаємо рис.2.2, використання якого значно спрощує заповнення діаграми по заданій ДДНФ досліджуваної функції.

	x_1	x_1	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_1$	
x_2	12	14	6	4	$\bar{x}_4$
x_2	13	15	7	5	x_4
$\bar{x}_2$	9	11	3	1	x_4
$\bar{x}_2$	8	10	2	0	$\bar{x}_4$
	$\bar{x}_3$	x_3	x_3	$\bar{x}_3$	

Рис. 2.2

2.5.01. Булеву функцію задано у вигляді наступної формули:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4).$$

Побудувати для цієї функції діаграму Карно–Вейча і скласти для неї мінімальну ДНФ.

<u>Розв'язання.</u> ДДНФ даної функції було створено раніше (див. 2.3.02):

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 +$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 \ .$$

Користуючись цією формою, заповнюємо одиницями відповідні клітини діаграми Карно–Вейча (рис. 2.3).

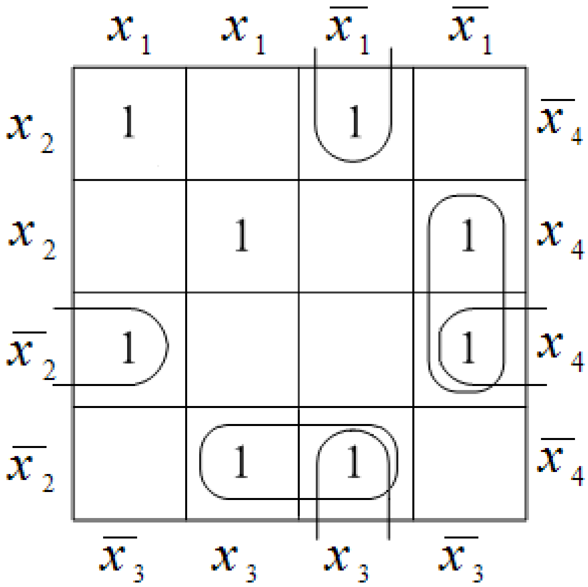

Рис. 2.3

Об'єднуючи сусідні пари одиниць у відповідні блоки, отримуємо чотири 2-клітинних блоки, яким відповідатимуть імпліканти 3-го рангу $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$. Звернемо увагу на те, що з цих блоків два є розірваними (діаграма є одночасно розгорткою двох циліндрів – вертикального і горизонтального). Крім зазначених блоків діаграма містить дві ізольовані одиниці, які не входять до жодного блоку – кожна з цих одиниць свідчить про збереження в мінімальній формі відповідних термів-кон'юнкцій ДДНФ. На підставі наведеної діаграми можна записати мінімальну ДНФ, яка відповідатиме заданій функції:

$$F_{\min} = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 . \qquad \square$$

2.5.02. Булеву функцію чотирьох змінних задано вектором її двійкових значень на всіх 16 наборах значень аргументів: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$ $= (0111100101110110)$. Скласти для цієї функції мінімальну ДНФ.

<u>Розв'язання.</u> Враховуючи десяткові номери одиничних координат заданого вектора (1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 13, 14) і користуючись рис. 2.2, побудуємо діаграму Карно–Вейча та поєднуємо у відповідні блоки сусідні одиниці (рис. 2.4).

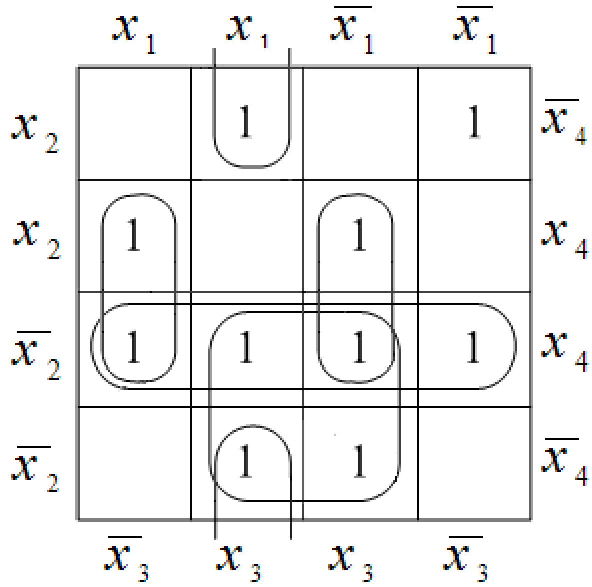

Рис. 2.4

Відповідно до трьох 2-клітинних блоків мінімальна ДНФ міститиме три імпліканти 3-го рангу: $x_1\bar{x}_3x_4$, $x_1x_3\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1x_3x_4$, а відповідно до двох 4-клітинних блоків – дві імпліканти 2-го рангу: $\bar{x}_2x_4$ і $\bar{x}_2x_3$. Оскільки після побудови блоків одна одиниця залишається осторонь цих блоків, терм-кон'юнкція, яка відповідає зазначеній одиниці, увійде в мінімальну форму без змін. Відшукувана ДНФ матиме наступний вигляд:

$$F_{\min} = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_3x_4 + x_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3x_4 + \bar{x}_2x_4 + \bar{x}_2x_3. \qquad \square$$

2.5.03. Булеву функцію задано у вигляді формули

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 \wedge x_4 \vee x_3) \rightarrow (x_1 \oplus x_4) \wedge x_2 .$$

Знайшовши ДДНФ цієї функції, побудувати мінімальну ДНФ.

Розв'язання. ДДНФ даної функції має вигляд (див. 2.3.03):

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \\ + \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 .$$

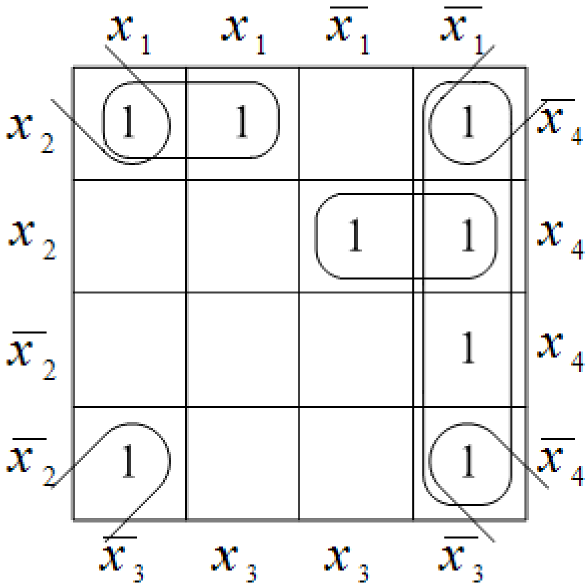

Рис. 2.5

Заповнюючи одиницями клітини діаграми Карно–Вейча (рис. 2.5) і об'єднуючи їх у відповідні блоки, матимемо два 2-клітинних та два 4-клітинних блоки (один з них створено чотирма кутовими одиницями, які повинні вважатися сусідніми у зв'язку з тим, що діаграма є горизонтальною і вертикальною розгорткою циліндра). Зазначеним блокам відповідатимуть дві імпліканти 3-го рангу $x_1 x_2 \bar{x}_4$ і $\bar{x}_1 x_2 x_4$ та дві імпліканти 2-го рангу $\bar{x}_1 \bar{x}_3$ і $\bar{x}_3 \bar{x}_4$. Таким чином, мінімальна ДНФ набуває вигляду

$$F_{\min} = x_1 x_2 \bar{x}_4 + x_1 x_2 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \bar{x}_3 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 . \qquad \square$$

2.5.04. Булеву функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задано вектором її двійкових значень: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110111100011110)$. Скласти для цієї функції мінімальну ДНФ.

<u>Розв'язання.</u> Як і в 2.5.02, для побудови діаграми Карно–Вейча (рис. 2.6) найзручніше врахувати десяткові номери одиничних координат заданого вектора (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14) і скористатися рис. 2.2.

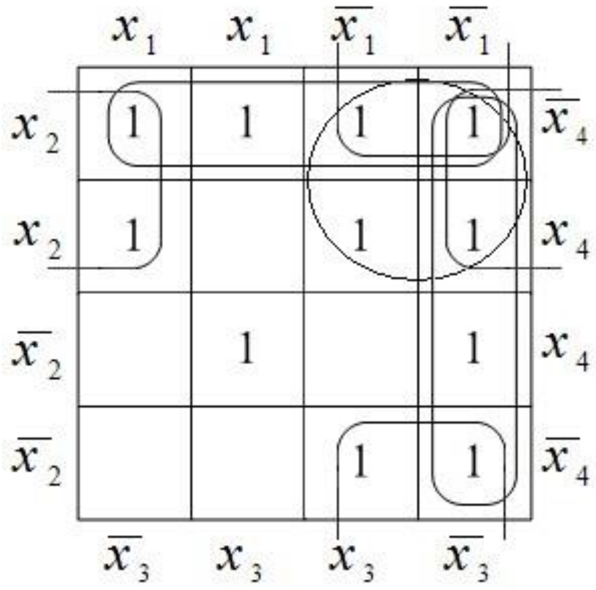

Рис. 2.6

Об'єднання сусідніх одиниць у блоки (маємо п'ять 4-клітинних блоків) породжує п'ять імплікант 2-го рангу $x_2\bar{x}_4, x_1x_2, \bar{x}_1x_2, \bar{x}_1\bar{x}_3, \bar{x}_1\bar{x}_4$. Одиниці, що залишилася осторонь усіх блоків, у мінімальній формі відповідатиме терм-кон'юнкція ДДНФ $x_1\bar{x}_2x_3x_4$, який увійде в цю форму без змін. Отже, отримуємо наступну мінімальну ДНФ:

$$F_{\min} = x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_2\bar{x}_4 + x_1x_2 + \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_4 . \qquad \square$$

2.5.05. Булеву функцію задано у вигляді формули

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \to x_2) \vee (x_3 \sim x_4) .$$

Знайшовши ДДНФ цієї функції, побудувати мінімальну ДНФ.

Розв'язання. Для знаходження ДДНФ складемо таблицю істинності даної функції (табл. 2.8).

Діаграма Карно–Вейча має вид, показаний на рис. 2.7. Зауважимо, що крім двох 8-клітинних блоків (відповідні імпліканти 1-го рангу – $\bar{x}_1$ і x_2,) та центрального 4-клітинного блоку (відповідна імпліканта 2-го рангу – x_3x_4) на діаграмі існує ще 4-клітинний блок, який поєднує 4 кутові одиниці (див. таке ж саме зауваження в 2.5.03) й якому відповідає імпліканта $\bar{x}_3\bar{x}_4$. Таким чином, мінімальна ДНФ набуває наступного вигляду:

$$F_{\min} = x_3x_4 + \bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1 + x_2 .$$

Таблиця 2.8

x_1	x_2	x_3	x_4	$x_1 \to x_2$	$x_3 \sim x_4$	$F(x_1, x_2, x_3, x_4)$
0	0	0	0	1	1	1
0	0	0	1	1	0	1
0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	1	1
1	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1

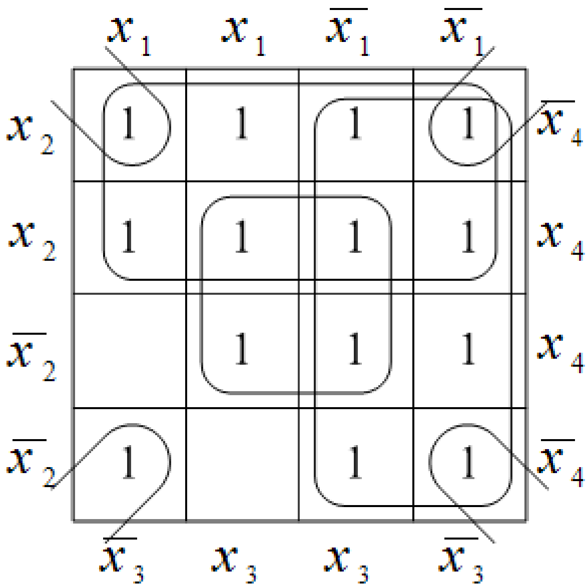

Рис. 2.7

□

У задачах 2.5.01 – 2.5.25 скласти досконалу диз’юнктивну нормальну форму для зазначеної булевої функції $F(x_1,x_2,x_3,x_4)$; одержану ДДНФ мінімізувати за допомогою діаграми Карно–Вейча.

2.5.01. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \leftarrow x_3) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \sim (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.02. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \leftarrow x_2) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \oplus (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.03. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2 \wedge x_3 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow x_1 \wedge (x_2 \oplus x_3)$.

2.5.04. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2 \rightarrow \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \oplus (x_3 \sim x_4))$.

2.5.05. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge x_2 \leftarrow (\bar{x}_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_3 \sim x_4)$.

2.5.06. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_2 \vee (x_1 \oplus x_4)) \rightarrow (x_1 \leftarrow x_4) \wedge x_3$.

2.5.07. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \downarrow \bar{x}_2) \leftarrow (x_1 \vee x_2) \wedge (x_3 \oplus x_4)$.

2.5.08. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge (x_3 \sim x_4) \leftarrow (\bar{x}_2 \rightarrow x_3 \wedge \bar{x}_4)$.

2.5.09. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=((x_1 \sim x_2) \leftarrow (\bar{x}_3 \rightarrow x_4)) \vee x_3 \wedge x_4$.

2.5.10. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \wedge x_2 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \oplus x_2) \wedge \bar{x}_3$.

2.5.11. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \rightarrow ((x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \sim (x_3 \sim x_4))$.

2.5.12. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2 \mid \bar{x}_4) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim (x_3 \sim x_4))$.

2.5.13. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1 \wedge \bar{x}_2 \vee ((x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \sim (x_3 \leftarrow \bar{x}_4))$.

2.5.14. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow ((x_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.15. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge \bar{x}_2 \vee \left(\overline{x_1 \leftarrow x_2} \oplus (\bar{x}_3 \rightarrow x_4)\right)$.

2.5.16. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \leftarrow x_2) \rightarrow (x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.17. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_2 \leftarrow \bar{x}_4) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.18. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee x_2) \rightarrow ((\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \oplus (x_3 \oplus x_4))$.

2.5.19. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_2 \mid x_4) \rightarrow (\bar{x}_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \sim x_4))$.

2.5.20. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \downarrow x_2) \leftarrow (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_3 \sim x_4)$.

2.5.21. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \rightarrow x_3 \wedge x_4) \rightarrow x_2 \wedge (x_3 \oplus x_4)$.

2.5.22. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1 \wedge x_2 \leftarrow (x_1 \rightarrow x_2) \wedge (x_3 \oplus \bar{x}_4)$.

2.5.23. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \vee x_2) \rightarrow \left(\overline{x_1 \leftarrow x_2} \oplus (x_3 \oplus x_4)\right)$.

2.5.24. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \wedge \bar{x}_2 \leftarrow \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \sim x_2) \wedge x_4$.

2.5.25. $F(x_1,x_2,x_3,x_4)=((x_1 \oplus x_2) \leftarrow (x_3 \leftarrow \bar{x}_4)) \vee x_3 \wedge x_4$.