Досконалі диз'юнктивна й кон'юнктивна нормальні форми

Елементарною кон'юнкцією (*мінтермом*) називається кон'юнкція скінченого числа булевих змінних та їхніх заперечень. Наприклад, $F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3$. *Елементарною диз'юнкцією* (*макстермом*) називається диз'юнкція скінченого числа булевих змінних та їхніх заперечень. Наприклад, $F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3 + x_4$. Враховуючи таблиці істинності операцій кон'юнкції та диз'юнкції, зауважимо, що мінтерм є функцією, яка приймає одиничне значення при одному з усіх можливих наборів аргументів і нульове значення – при всіх інших, а макстерм – функцією, яка приймає нульове значення при одному з можливих наборів і одиничне значення – при всіх інших. Число змінних (аргументів), що складають елементарну кон'юнкцію чи диз'юнкцію, називається її рангом. Наприклад, наведена вище функція F_1 є елементарною кон'юнкцією 3-го рангу, а функція F_2 – елементарною диз'юнкцією 4-го рангу.

Булеві функції можуть бути подані в двох формах, які називаються нормальними: 1) сума добутків – диз'юнктивна нормальна форма (ДНФ), 2) добуток сум – кон'юнктивна нормальна форма (КНФ).

Досконалою диз'юнктивною нормальною формою (ДДНФ) називається ДНФ, яка відповідає наступним вимогам: а) всі кон'юнкції мають один і той самий ранг; б) немає двох однакових кон'юнкцій; в) жодна з кон'юнкцій не містить двох однакових множників; г) жодна з кон'юнкцій не містить змінну разом з її запереченням.

Досконалою кон'юнктивною нормальною формою (ДКНФ) називається КНФ, яка відповідає наступним вимогам: а) всі диз'юнкції мають один і той самий ранг; б) немає двох однакових диз'юнкцій; в) жодна з диз'юнкцій не містить двох однакових доданків; г) жодна з диз'юнкцій не містить змінну разом з її запереченням.

Кожна булева функція (крім функції $f = 0$) має єдину досконалу диз'юнктивну нормальну форму; кожна булева функція (крім функції $f = 1$) має єдину досконалу кон'юнктивну нормальну форму. Досконалі нормальні форми для даної булевої функції створюють за допомогою її таблиці істинності. Побудова ДДНФ здійснюється відповідно до наступного алгоритму: 1) для кожного одиничного рядка таблиці істинності (рядка, в якому значення функції дорівнює одиниці) записують кон'юнкцію – логічний добуток змінних, що мають одиничне значення в цьому рядку, і заперечень тих змінних, які в даному рядку мають нульове значення; 2) складають ДДНФ у виді логічної суми створених кон'юнкцій. Певною мірою аналогічний алгоритм застосовується при побудові ДКНФ: 1) для кожного нульового рядка таблиці істинності (рядка, в якому значення функції дорівнює нулю) записують диз'юнкцію – логічну суму змінних, що мають нульове значення в цьому рядку, і заперечень тих змінних, які в даному рядку мають одиничне значення; 2) складають ДКНФ у виді логічного добутку створених диз'юнкцій.

2.3.01. Булеву функцію $F(x_1, x_2, x_3)$ задано таблицею істинності (див. табл. 2.6). Скласти для цієї функції досконалу диз'юнктивну та досконалу кон'юнктивну нормальні форми.

Розв'язання. Для складання ДДНФ беремо до уваги рядки 1,2,4 і 7. У першому рядку $F = 1$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 1$. Тому відповідний доданок ДДНФ має вигляд $F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2 x_3$. Аналогічно з другого, четвертого й сьомого рядків отримаємо наступні доданки: $F_2 = \bar{x}_1 x_2 \bar{x}_3$, $F_4 = x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, $F_7 = x_1 x_2 x_3$.

Таблиця 2.6

№ рядка	x_1	x_2	x_3	F
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	1

Отже, ДДНФ буде сумою цих доданків:

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3 .$$

Для складання ДКНФ врахуємо рядки 0,3,5 і 6. У нульовому рядку $F = 0$ при $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$. Тому матимемо відповідний множник ДКНФ у вигляді $F_0 = x_1 + x_2 + x_3$. Аналогічно третій, п'ятий і шостий рядки дають наступні множники: $F_3 = x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3$, $F_5 = \bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3$, $F_6 = \bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3$. Після цього запишемо ДКНФ у вигляді добутку отриманих таким чином множників:

$$F_{\text{ДКНФ}} = (x_1 + x_2 + x_3)(x_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + x_2 + \bar{x}_3)(\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + x_3) . \qquad \square$$

Іншим способом побудови досконалих нормальних форм є здійснення тотожних перетворень даної булевої функції з використанням відповідних законів булевої алгебри.

2.3.02. Для булевої функції $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4)$ скласти досконалу диз'юнктивну нормальну форму, використовуючи при цьому необхідні тотожні перетворення заданої формули.

Розв'язання. Для складання ДДНФ беремо до уваги формат цієї форми як суму добутків 4-го рангу і здійснюємо наступні перетворення:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = \underbrace{x_1 \cdot x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4)}_{x \oplus y \equiv x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y} = x_1x_2 \cdot \underbrace{(x_3 \sim x_4)}_{x \sim y \equiv x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}} + \underbrace{\overline{x_1x_2}}_{\substack{\text{закон} \\ \text{де Моргана}}} \cdot \underbrace{(x_3 \oplus x_4)}_{x \oplus y \equiv x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y} =$$

$$= \underbrace{x_1x_2 \cdot (x_3x_4 + \bar{x}_3\bar{x}_4)}_{\text{дистрибутивний закон}} + \underbrace{(\bar{x}_1 + \bar{x}_2) \cdot (x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_3x_4)}_{\text{дистрибутивний закон}} = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 +$$

$$+ \underbrace{(\bar{x}_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3x_4) \cdot \underbrace{(x_2 + \bar{x}_2)}_{x + \bar{x} \equiv 1}}_{\substack{\text{вирівнювання рангів і} \\ \text{дистрибутивний закон}}} + \underbrace{(\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4) \cdot \underbrace{(x_1 + \bar{x}_1)}_{x + \bar{x} \equiv 1}}_{\substack{\text{вирівнювання рангів і} \\ \text{дистрибутивний закон}}} =$$

$$= x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4}_{x + x \equiv x} + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 +$$

$$+ x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \underbrace{\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4}_{x + x \equiv x} = x_1x_2x_3x_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 +$$

$$+ \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 .$$

Отже, маємо

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 + \\ + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 \;.$$ □

Індивідуальні завдання. У задачах 01 – 30 булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задано певною формулою.

- Скласти для цієї функції **досконалу диз'юнктивну нормальну форму**, скориставшись при цьому двома способами:
  - побудовою таблиці істинності запропонованої функції;
  - здійсненням потрібних тотожних перетворень, що зводять надану формулу до формату ДДНФ.
- Скласти для цієї функції **досконалу кон'юнктивну нормальну форму**, скориставшись при цьому побудовою таблиці істинності запропонованої функції.

1. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \mid x_2) \to (\bar{x}_3 \oplus x_4)$.

2. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge \bar{x}_2 \leftarrow x_3) \to \bar{x}_4$.

3. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \wedge x_2 \leftarrow \bar{x}_3) \sim x_4$.

4. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \mid \bar{x}_2) \to (\bar{x}_3 \sim x_4)$.

5. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \to x_2) \mid \overline{x_3 \oplus x_4}$.

6. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \to \bar{x}_2) \to \overline{x_3 \oplus x_4}$.

7. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \to x_2) \mid \overline{x_3 \sim x_4}$.

8. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \oplus x_2) \vee (\bar{x}_3 \leftarrow x_4)$.

9. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \sim x_2) \vee \overline{\bar{x}_3 \to x_4}$.

10. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \oplus \bar{x}_2) \vee \overline{x_3 \leftarrow x_4}$.

11. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \sim (\bar{x}_3 \to x_4)$.

12. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \oplus \overline{x_3 \to x_4}$.

13. $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \mid \bar{x}_2) \sim (x_3 \leftarrow \bar{x}_4)$.

14. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \vee \bar{x}_2) \leftarrow (\bar{x}_3 \sim x_4)$.

15. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1 \leftarrow x_2} \oplus (\bar{x}_3 \to x_4)$.

16. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim \overline{x_3 \sim x_4}$.

17. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \wedge x_2 \leftarrow x_3) \sim \bar{x}_4$.

18. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=x_1 \wedge \bar{x}_2 \sim \overline{x_3 \oplus x_4}$.

19. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\bar{x}_1 \oplus (x_2 \to x_3 \wedge \bar{x}_4)$.

20. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \to \bar{x}_2) \mid \overline{x_3 \oplus x_4}$.

21. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \to x_2) \leftarrow (x_3 \sim \bar{x}_4)$.

22. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \to (x_2 \downarrow \bar{x}_3)) \sim \bar{x}_4$.

23. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \oplus \bar{x}_2) \vee \overline{x_3 \to x_4}$.

24. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \sim x_2) \vee \overline{x_3 \to \bar{x}_4}$.

25. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \oplus x_2) \vee \overline{x_3 \leftarrow \bar{x}_4}$.

26. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \leftarrow x_2) \sim \overline{\bar{x}_3 \oplus x_4}$.

27. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \leftarrow x_2) \oplus \overline{x_3 \sim x_4}$.

28. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(\bar{x}_1 \mid x_2) \sim (\bar{x}_3 \leftarrow x_4)$.

29. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=(x_1 \downarrow \bar{x}_2) \oplus (\bar{x}_3 \oplus x_4)$.

30. $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=\overline{x_1 \to x_2} \wedge x_3 \leftarrow \bar{x}_4$.