Поліноми Жегалкіна

Система функцій, яка побудована на базі операцій ($\wedge, \oplus$), є ще одним прикладом функціонально повної системи. Алгебра $(B, \wedge, \oplus, 0, 1)$, утворена множиною-носієм $B = \{0, 1\}$, бінарними операціями $\wedge$ і $\oplus$ та константами 0,1, називається алгеброю Жегалкіна. Вказаним операціям притаманні наступні властивості:

$$x \oplus y = y \oplus x; \quad x(y \oplus z) = xy \oplus xz; \quad x \oplus x = 0; \quad x \oplus 0 = x.$$

Крім того, матимемо на увазі формули, що виражають заперечення й диз'юнкцію за допомогою операцій $\wedge$ і $\oplus$:

$$\bar{x} = x \oplus 1; \quad x + y = xy \oplus x \oplus y.$$

Якщо у довільній формулі алгебри Жегалкіна, яка представляє певну логічну функцію, розкрити дужки та здійснити всі можливі спрощення, одержана таким чином формула матиме вигляд суми за модулем 2 добутків, тобто полінома за модулем 2. Цей поліном називається поліномом Жегалкіна даної функції. Для його побудови здійснюються тотожні перетворення заданої булевої функції, в якій, насамперед, роблять заміну диз'юнкцій і заперечень із застосуванням операцій алгебри Жегалкіна, після чого отриманий вираз спрощують з урахуванням властивостей цих операцій і загальних законів булевої алгебри. Крім цього способу побудови, поліном Жегалкіна може бути створений інакше – за методом невизначених коефіцієнтів. Основою застосування цього способу є загальний вид полінома; для функції двох змінних це

$$f(x_1, x_2) = A_0 \oplus A_1x_1 \oplus A_2x_2 \oplus A_3x_1x_2,$$

для функції трьох змінних –

$$f(x_1, x_2, x_3) = A_0 \oplus A_1x_1 \oplus A_2x_2 \oplus A_3x_3 \oplus A_4x_1x_2 \oplus A_5x_1x_3 \oplus A_6x_2x_3 \oplus A_7x_1x_2x_3$$

і т.д. Щоб знайти значення коефіцієнтів A_0, A_1, A_2, …, для даної функції заповнюється таблиця істинності, яка дозволяє скласти відповідну кількість рівнянь (чотири для функції двох змінних, вісім – для функції трьох змінних і т.д.), що містять зазначені коефіцієнти як невідомі величини. Розв'язуючи систему цих рівнянь, визначаємо коефіцієнти (їхні можливі значення – 0 і 1) та записуємо поліном.

2.4.01. Функцію $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)$ подати у вигляді полінома Жегалкіна.

Розв'язання. *1 спосіб.* Розкриваючи в даній функції дужки й враховуючи закони алгебри логіки, властивості операцій алгебри Жегалкіна та формули, які через ці операції виражають заперечення й диз'юнкцію, матимемо:

$$\underbrace{(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)}_{\text{дистрибутивний закон}}=\underbrace{\underline{x_1\bar{x}_2}+x_1x_1x_3+\underline{x_2\bar{x}_2}}_{x+x\equiv x}+x_1x_2x_3=\underbrace{x_1\bar{x}_2+x_1x_3}_{x+y\equiv xy\oplus x\oplus y}+x_1x_2x_3=$$

$$=\underbrace{(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)+x_1x_2x_3}_{x+y\equiv xy\oplus x\oplus y}=$$

$$=(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)x_1x_2x_3\oplus(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)\oplus x_1x_2x_3=$$

$$=x_1x_2x_3\oplus\underbrace{x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2}_{\bar{x}\equiv x\oplus 1}\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3=$$

$$=\underbrace{x_1(x_2\oplus 1)x_3}_{x(y\oplus z)\equiv xy\oplus xz}\oplus\underbrace{x_1(x_2\oplus 1)\oplus x_1x_3}_{x(y\oplus z)\equiv xy\oplus xz}=x_1x_2x_3\oplus\underbrace{\underline{x_1x_3}\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus\underline{x_1x_3}}_{x\oplus x\equiv 0}=$$

$$=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\ .$$

Отже, поліном Жегалкіна для даної функції має вигляд

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3.$$

2 спосіб. Складемо таблицю істинності наданої функції (табл. 2.7). Після цього, послідовно підставивши кожен набір значень аргументів x_1,x_2,x_3 і відповідне значення функції $f(x_1,x_2,x_3)$ у загальний вираз полінома, дістанемо систему 8 рівнянь

Таблиця 2.7

x_1	x_2	x_3	$\bar{x}_2$	x_1+x_2	x_1x_3	$\bar{x}_2+x_1x_3$	f
0	**0**	**0**	1	0	0	1	**0**
0	**0**	**1**	1	0	0	1	**0**
0	**1**	**0**	0	1	0	0	**0**
0	**1**	**1**	0	1	0	0	**0**
1	**0**	**0**	1	1	0	1	**1**
1	**0**	**1**	1	1	1	1	**1**
1	**1**	**0**	0	1	0	0	**0**
1	**1**	**1**	0	1	1	1	**1**

$$\begin{cases} 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 1. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи розв’язуємо послідовно, починаючи з першого:

$A_0 = 0;$

$A_3 \cdot 1 = 0; \qquad A_3 = 0;$

$A_2 \cdot 1 = 0; \qquad A_2 = 0;$

$A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 = 0; \qquad A_6 \cdot 1 = 0; \qquad A_6 = 0;$

$A_1 \cdot 1 = 1; \qquad A_1 = 1;$

$A_1 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 = 1; \qquad 1 \oplus A_5 \cdot 1 = 1; \qquad A_5 = 0;$

$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0; \qquad 1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0; \qquad A_4 = 1;$

$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1; \quad 1 \oplus 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1;$

$A_7 = 1.$

Після підстановки значень знайдених коефіцієнтів у загальний вираз полінома, набуваємо його наступний вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$

(порівн. з результатом застосування 1-го способу розв'язку). □

<u>Індивідуальні завдання</u>. У задачах 01 – 30 задану булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ подати у вигляді полінома Жегалкіна, використовуючи при цьому:

a) необхідні тотожні перетворення (заміну диз'юнкцій і заперечень відповідно до зазначених вище формул та застосування законів булевої алгебри);

b) метод невизначених коефіцієнтів.

1. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \to x_3) \vee x_2) \mid (\bar{x}_1 \sim x_2 \wedge x_3)$.
2. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3 \to ((x_1 \sim x_3) \vee x_2)$.
3. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \mid x_2 \wedge x_3) \wedge ((x_1 \sim \bar{x}_3) \vee x_2)$.
4. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3 \to ((x_1 \vee x_2) \downarrow x_3)$.
5. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \to (x_3 \sim (x_2 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3))$.
6. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3 \leftarrow ((x_1 \downarrow x_2) \mid \bar{x}_3)$.
7. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 \to (x_2 \mid (x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2))$.
8. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \mid x_3) \to ((\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_3)$.
9. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3 \to x_2) \mid (x_1 \leftarrow (\bar{x}_2 \vee x_3))$.
10. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3) \mid (x_3 \downarrow x_1 \wedge x_2)$.
11. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sim ((\bar{x}_1 \mid x_2 \wedge x_3) \to \bar{x}_3)$.
12. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_3) \leftarrow x_2) \mid (x_1 \sim \bar{x}_2 \wedge x_3)$.
13. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3) \downarrow x_2) \leftarrow \bar{x}_3$.
14. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_3) \vee x_2) \to (x_1 \downarrow x_2) \wedge \bar{x}_3$.
15. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \mid \bar{x}_2) \sim x_3) \vee (x_1 \leftarrow x_3) \wedge x_2$.
16. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3 \sim x_2) \mid ((x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \vee x_3)$.
17. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim x_2) \vee x_3) \to x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$.
18. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \mid x_3) \wedge ((\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_3)$.
19. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \to (x_1 \downarrow (x_2 \vee x_3))$.
20. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (\bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3)) \leftarrow \bar{x}_2$.
21. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \leftarrow (\bar{x}_1 \mid (x_2 \downarrow x_3))$.

22. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \to (x_3 \downarrow (x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3))$.

23. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \mid x_2 \wedge x_3) \to (x_1 \vee (\bar{x}_2 \sim x_3)$.

24. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \to x_3) \mid ((x_1 \vee \bar{x}_3) \to x_2)$.

25. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_3 \vee x_2) \to (x_1 \downarrow x_2 \wedge x_3)$.

26. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sim (\bar{x}_1 \leftarrow (\bar{x}_2 \mid x_1 \wedge x_3))$.

27. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \leftarrow x_3) \mid (x_1 \wedge \bar{x}_3 \sim x_2)$.

28. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \to ((x_2 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3) \downarrow x_3)$.

29. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_2) \vee x_3) \to \bar{x}_1 \wedge (x_2 \downarrow x_3)$.

30. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (x_2 \mid \bar{x}_3)) \vee (x_1 \to x_2) \wedge x_3$.