Функціонально повні системи функцій з операціями $(\neg, \vee)$, $(\neg, \wedge)$ і $(\neg, \to)$

Систему булевих функцій називають *функціонально повною*, якщо будь-яку булеву функцію можна виразити у вигляді формули, яка є суперпозицією функцій цієї системи. Функціонально повна система, з якої не можна виключити жодної функції, називається *незвідною*. Такими системами функцій є, зокрема, системи, які створені за допомогою наступних пар операцій:

$(\neg, \vee)$, $(\neg, \wedge)$, $(\neg, \to)$.

Приклад. Логічну формулу $(\bar a \sim b) \vee \overline{c \leftarrow d} \wedge \bar g$ подати у вигляді виразу, в якому присутні тільки дві операції: а) диз'юнкція та заперечення;

б) кон'юнкція та заперечення; в) імплікація та заперечення.

Розв'язання. *1 спосіб.*

а)
$$\underbrace{(\bar a \sim b)}_{\substack{x\sim y\equiv(x\to y)\cdot(y\to x)\equiv\\ \equiv(\bar x+y)\cdot(\bar y+x)}} \vee \underbrace{\overline{c \leftarrow d}}_{\substack{x\leftarrow y\equiv\\ \equiv\bar y+x}} \wedge \bar g = \underbrace{(a+b)\cdot(\bar a+\bar b)}_{\text{закон де Моргана}} + \underbrace{\overline{c+\bar d}\cdot\bar g}_{\text{закон де Моргана}} =$$

$$=\overline{\overline{a+b}+\overline{\bar a+\bar b}}+\overline{c+\bar d+g}\,.$$

б)
$$\underbrace{(a+b)}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}}\cdot\underbrace{(\bar a+\bar b)}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}}+\underbrace{\overline{c+\bar d}}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}}\cdot\bar g=\underbrace{\overline{\bar a\cdot\bar b}\cdot\overline{a\cdot b}+\bar c\cdot d\cdot\bar g}_{\text{закон де Моргана}}=$$

$$=\overline{\overline{\overline{\bar a\cdot\bar b}\cdot\overline{a\cdot b}}\cdot\overline{\bar c\cdot d\cdot\bar g}}\,.$$

в)
$$\underbrace{(\bar a\sim b)}_{x\sim y\equiv(x\to y)\cdot(y\to x)} \vee \underbrace{\overline{c\leftarrow d}\wedge\bar g}_{\text{закон де Моргана}} = \underbrace{(\bar a\to b)\cdot(b\to\bar a)}_{\text{закон де Моргана}} + \underbrace{\overline{c\leftarrow d+g}}_{x+y\equiv\bar x\to y} =$$

$$=\underbrace{\overline{\overline{\bar a\to b}+\overline{b\to\bar a}}}_{x+y\equiv\bar x\to y}+\overline{(c\leftarrow d)\leftarrow\bar g}=\underbrace{\overline{(\bar a\to b)\to\overline{b\to\bar a}}+\overline{(c\leftarrow d)\leftarrow\bar g}}_{x+y\equiv\bar x\to y}=$$

$$=\left((\bar a\to b)\to\overline{b\to\bar a}\right)\to\overline{(c\leftarrow d)\leftarrow\bar g}\,.$$

2 спосіб.

а)
$$\underbrace{(\bar a\sim b)}_{\substack{x\sim y\equiv\\ \equiv x\cdot y+\bar x\cdot\bar y}} \vee \underbrace{\overline{c\leftarrow d}}_{\substack{x\leftarrow y\equiv\\ \equiv\bar y+x}}\wedge\bar g = \underbrace{\bar a\cdot b}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}} + \underbrace{a\cdot\bar b}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}} + \underbrace{\overline{c+\bar d}\cdot\bar g}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}} =$$

$$=\overline{a+\overline{b}}+\overline{\overline{a}+b}+\overline{c+\overline{d}+g}.$$

$$\text{б) } \underbrace{\overline{a}\cdot b+a\cdot\overline{b}+\underbrace{\overline{c+\overline{d}}}_{\substack{\text{закон}\\ \text{де Моргана}}}}_{\text{закон де Моргана}}\cdot\overline{g}=\overline{\overline{\overline{a}\cdot b}\cdot\overline{a\cdot\overline{b}}\cdot\overline{\overline{c}\cdot d\cdot\overline{g}}}.$$

$$\text{в) } (\overline{a}\sim b)\vee\overline{c\leftarrow d}\wedge\overline{g}=\left((\overline{a}\to b)\to\overline{b\to\overline{a}}\right)\to\overline{(c\leftarrow d)\leftarrow\overline{g}}$$

(див. 1 спосіб). □

У задачах 01 – 30 запропоновану логічну формулу подати у такий спосіб, щоб в її запису були використані тільки дві операції: а) диз'юнкція й заперечення; б) кон'юнкція й заперечення; в) імплікація й заперечення.

1. $(a\sim\overline{b})\vee(c\sim\overline{d})$.

2. $(a\to\overline{b})\wedge(c\to\overline{d})\vee\overline{g}$.

3. $(a\sim\overline{b})\wedge(c\sim\overline{d})$.

4. $(a\vee\overline{b})\oplus(c\to\overline{d})$.

5. $(a\vee\overline{b})\wedge(c\sim\overline{d})$.

6. $(a\to\overline{b})\wedge(c\sim\overline{d})$.

7. $(a\to\overline{b})\vee(c\to\overline{d})\wedge\overline{g}$.

8. $\overline{a\vee\overline{b}}\wedge(c\sim d)$.

9. $(a\wedge\overline{b})\vee\overline{c\to d}\wedge g$.

10. $(a\wedge\overline{b})\vee(c\to\overline{d})\wedge\overline{g}$.

11. $(a\wedge\overline{b})\vee(c\sim\overline{d})$.

12. $(a\to\overline{b})\vee(c\sim\overline{d})$.

13. $(a\sim\overline{b})\to(c\sim\overline{d})$.

14. $(a\vee\overline{b})\to(c\to\overline{d})\wedge\overline{g}$.

15. $(a\vee\overline{b})\to(c\sim\overline{d})$.

16. $(a\to\overline{b})\to(c\sim\overline{d})$.

17. $(a\vee\overline{b})\wedge\overline{c\to d}\vee\overline{g}$.

18. $(a\vee\overline{b})\wedge(c\to\overline{d})\vee\overline{g}$.

19. $(a \vee \overline{b}) \rightarrow (c \leftarrow \overline{d}) \wedge \overline{g}$.

20. $(a \vee \overline{b}) \leftarrow (c \sim \overline{d})$.

21. $(a \leftarrow \overline{b}) \rightarrow (c \sim \overline{d})$.

22. $(\overline{a} \sim b) \vee (\overline{c} \sim d)$.

23. $(\overline{a} \rightarrow b) \wedge (\overline{c} \rightarrow d) \rightarrow g$.

24. $(\overline{a} \sim b) \wedge (\overline{c} \sim d)$.

25. $(\overline{a} \vee b) \oplus (\overline{c} \rightarrow d)$.

26. $(\overline{a} \vee b) \wedge (\overline{c} \sim d)$.

27. $(\overline{a} \rightarrow b) \wedge (\overline{c} \sim d)$.

28. $(\overline{a} \rightarrow b) \vee (\overline{c} \rightarrow d) \wedge \overline{g}$.

29. $(\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{c} \rightarrow d) \wedge g$.

30. $(\overline{a} \wedge b) \vee (\overline{c} \sim d)$