Формули алгебри логіки. Тавтології

Формули $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називаються *еквівалентними* (*рівносильними*), якщо при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$, що входять у ці формули, вони набувають однакових значень. Еквівалентність формул позначається знаком рівності. Перевірку еквівалентності формул можна здійснювати: 1) застосовуючи для однієї або обох формул тотожні перетворення, що ведуть до їх спрощення, 2) шляхом побудови для обох формул їхніх таблиць істинності.

Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *тотожно істинною* або *тавтологією*, якщо її значення дорівнює 1 при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Приклади тавтологій: $x \vee \bar{x}$, $x \to (y \to x)$. Формула $F \sim H$ є тавтологією тоді й тільки тоді, коли дві формули $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ і $H(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ еквівалентні.

Формула $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ називається *тотожно хибною* або *суперечливою*, якщо її значення дорівнює 0 при будь-яких значеннях змінних $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Приклади: $x \wedge \bar{x}$, $(x \oplus y) \wedge (x \downarrow y)$.

Відображенням еквівалентності булевих формул є закони булевої алгебри (табл. 2.3).

Таблиця 2.3

Назва закона	Диз'юнкція	Кон'юнкція
Комутативність	$x + y = y + x$	$x \cdot y = y \cdot x$
Асоціативність	$x + (y + z) = (x + y) + z$	$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
Дистрибутивність	$x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$	$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
Інверсія (закони де Моргана)	$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$	$\overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$
Самопоглинання (ідемпотентність) та операції з 0 і 1	$x + x = x$ $x + 0 = x$ $x + 1 = 1$	$x \cdot x = x$ $x \cdot 0 = 0$ $x \cdot 1 = x$
Поглинання (елімінація)	$x + x \cdot y = x$	$x \cdot (x + y) = x$
Закон виключеного третього	$x + \bar{x} = 1$	
Закон протиріччя		$x \cdot \bar{x} = 0$

Закон подвійного заперечення	$\bar{\bar{x}} = x$

У тотожних перетвореннях булевих формул дуже корисними є деякі важливі еквівалентності:

$$x \to y = \bar{x} + y;$$
$$x \sim y = (x \to y) \cdot (y \to x) = x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y};$$
$$x \oplus y = (x + y) \cdot (\bar{x} + \bar{y}) = x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y;$$
$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}; \quad x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}.$$

2.1.01. Довести еквівалентність формул

$$F_1 = (\bar{x} \to y) \to (\bar{x} \wedge y \sim (x \oplus z)); \quad F_2 = \bar{x} \wedge (y \to y \wedge z) \vee x \wedge z.$$

Розв'язання. *1 спосіб.* Використовуючи закони булевої алгебри і відомі еквівалентності, спрощуємо обидві формули:

$$F_1 = \underbrace{(\bar{x} \to y)}_{x \to y \equiv \bar{x} + y} \to \underbrace{(\bar{x} \wedge y \sim (x \oplus z))}_{x \sim y \equiv x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}} = \underbrace{(x + y) \to \left(\bar{x} \cdot y \cdot \underbrace{(x \oplus z)}_{x \oplus y \equiv x \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y} + \underbrace{\overline{\bar{x} \cdot y}}_{\overline{x \cdot y} \equiv \bar{x} + \bar{y}} \cdot \underbrace{\overline{x \oplus z}}_{\overline{x \oplus y} \equiv x \sim y} \right)}_{x \to y \equiv \bar{x} + y} =$$

$$= \underbrace{\overline{x + y}}_{\overline{x + y} \equiv \bar{x} \cdot \bar{y}} + (\underbrace{\bar{x} \cdot y \cdot (x \cdot \bar{z} + \bar{x} \cdot z)}_{\text{дистрибутивний закон}}) + (x + \bar{y}) \cdot \underbrace{(x \sim z)}_{x \sim y \equiv x \cdot y + \bar{x} \cdot \bar{y}}) =$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot z + \underbrace{(x + \bar{y}) \cdot (x \cdot z + \bar{x} \cdot \bar{z})}_{\text{дистрибутивний закон}} =$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot z + \underbrace{x \cdot z + x \cdot \bar{y} \cdot z}_{x + x \cdot y \equiv x} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} = \underbrace{\bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}}_{x + x \cdot y \equiv x} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot z =$$

$$= \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot z;$$

$$F_2 = \bar{x} \wedge \underbrace{(y \to y \wedge z)}_{x \to y \equiv \bar{x} + y} \vee x \wedge z = \underbrace{\bar{x} \cdot (\bar{y} + y \cdot z)}_{\text{дистрибутивний закон}} + x \cdot z = \bar{x} \cdot \bar{y} + \bar{x} \cdot y \cdot z + x \cdot z.$$

Порівнюючи отримані результати, робимо висновок про еквівалентність формул F_1 і F_2.

2 спосіб. Складемо таблиці істинності даних формул (табл. 2.4 і 2.5):

Таблиця 2.4

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{x} \to y$	$\bar{x} \cdot y$	$x \oplus z$	$\bar{x} \cdot y \sim (x \oplus z)$	F_1
0	0	0	1	0	0	0	1	1
0	0	1	1	0	0	1	0	1

0	1	0	1	1	1	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	0	1	1
1	1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1	1

Таблиця 2.5

x	y	z	$\bar{x}$	$y \cdot z$	$y \to y \cdot z$	$\bar{x} \cdot (y \to yz)$	$x \cdot z$	F_2
0	0	0	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	0	0	0	0	0
0	1	1	1	1	1	1	0	1
1	0	0	0	0	1	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	1	0	1	1

Порівнюючи останні стовпці побудованих таблиць, робимо такий самий висновок, який був зроблений відповідно до 1-го способу розв'язання: формули F_1 і F_2 еквівалентні. □

У задачах 2.1.02 – 2.1.31 потрібно довести еквівалентність заданих формул F_1 і F_2, застосувавши при цьому два способи: 1) тотожні перетворення однієї або обох формул для їхнього спрощення і наступного порівняння; 2) побудова та порівняння таблиць істинності наведених формул.

2.1.02. $F_1 = ((x \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) \mid (\bar{x} \to \bar{y} \wedge z)) \wedge (x \to (y \sim z))$; $F_2 = x \to \overline{\bar{z} \to (x \vee y)}$.

2.1.03. $F_1 = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \wedge (x \oplus y \wedge z)$; $F_2 = \overline{x \to z} \vee \bar{x} \wedge (y \wedge z)$.

2.1.04. $F_1 = \overline{x \to y} \oplus ((y \to \bar{z}) \to x \wedge y)$; $F_2 = \overline{y \wedge z \to x} \vee x$.

2.1.05. $F_1 = (x \vee \bar{y}) \downarrow (\bar{x} \to (y \to z))$; $F_2 = \overline{y \to (x \vee z)}$.

2.1.06. $F_1 = (((x \vee y) \to y \wedge z) \downarrow (y \to x \wedge z)) \vee (x \to (\bar{y} \to z))$; $F_2 = (x \to y) \vee z$.

2.1.07. $F_1 = ((x \to y) \sim (y \to (x \to z))) \oplus ((x \vee x \wedge y) \wedge y \wedge z)$;

$F_2 = (\bar{y} \vee \bar{z} \vee y \wedge z) \to \bar{x}$.

2.1.08. $F_1 = (x \wedge y \vee (\bar{x} \to y \wedge z)) \sim ((\bar{x} \to \bar{y}) \to z)$; $F_2 = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$.

2.1.09. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \to ((y \mid \bar{z}) \to (x \sim x \wedge z))$; $F_2 = x \wedge y \vee (\overline{x \to x \wedge \bar{y}} \to z)$.

2.1.10. $F_1 = \left(\overline{x \oplus y \wedge z} \to \left(\bar{x} \to \left(y \to z\right)\right)\right) \mid \bar{x}$; $F_2 = \bar{x} \to ((y \to z) \to x)$.

2.1.11. $F_1 = x \to ((\bar{x} \wedge \bar{y} \to (\bar{x} \wedge \bar{z} \to y)) \to y) \wedge z$; $F_2 = x \mid (y \to \bar{z})$.

2.1.12. $F_1 = (\bar{x} \to (\bar{y} \to (x \sim z))) \wedge (x \sim (y \to (z \vee (x \to y))))$;

$F_2 = (x \to (y \to z)) \to x$.

2.1.13. $F_1 = (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) \to ((x \to y) \to (\bar{x} \to (x \vee z)))$;

$F_2 = (x \to y) \to (x \vee (\bar{y} \to \bar{x}) \wedge z)$.

2.1.14. $F_1 = (x \wedge \bar{y} \vee \bar{x} \wedge z) \oplus ((y \to z) \to \bar{x} \wedge y)$; $F_2 = (x \wedge (\bar{y} \wedge \bar{z}) \oplus y) \oplus z$.

2.1.15. $F_1 = (x \vee (y \to z)) \wedge ((x \wedge y) \downarrow (\bar{x} \wedge \bar{y})) \mid x$; $F_2 = x \to ((y \to z) \to y \wedge z)$.

2.1.16. $F_1 = \overline{(x \sim y) \to (x \to \bar{z})} \vee (x \oplus \bar{y} \wedge z)$; $F_2 = x \sim (z \to y)$.

2.1.17. $F_1 = ((\bar{x} \wedge \bar{z} \vee y) \mid (\bar{y} \to \bar{x} \wedge z)) \wedge (y \to (x \sim z))$; $F_2 = y \to \overline{\bar{z} \to (x \vee y)}$.

2.1.18. $F_1 = \overline{(x \sim y) \vee (x \downarrow z)} \wedge (x \oplus y \wedge z)$; $F_2 = \bar{x} \wedge (y \wedge z) \vee \overline{x \to y}$.

2.1.19. $F_1 = \overline{y \to x} \oplus ((x \to \bar{z}) \to x \wedge y)$; $F_2 = \overline{x \wedge z \to y} \vee y$.

2.1.20. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \downarrow (\bar{y} \to (x \to z))$; $F_2 = \overline{x \to (y \vee z)}$.

2.1.21. $F_1 = (((x \vee y) \to x \wedge z) \downarrow (x \to y \wedge z)) \vee (y \to (\bar{x} \to z))$; $F_2 = (y \to x) \vee z$.

2.1.22. $F_1 = ((x \to (y \to z)) \sim (y \to x)) \oplus ((x \wedge y \vee y) \wedge x \wedge z)$;

$F_2 = (\bar{x} \vee \bar{z} \vee x \wedge z) \to \bar{y}$.

2.1.23. $F_1 = (x \wedge z \vee (\bar{x} \to y \wedge z)) \oplus ((\bar{x} \to \bar{z}) \to y)$; $F_2 = (x \to z) \sim (y \oplus z)$.

2.1.24. $F_1 = (\bar{x} \vee y) \to ((y \mid z) \to (x \sim x \wedge \bar{z}))$; $F_2 = x \wedge y \vee (\overline{x \to x \wedge \bar{y}} \to \bar{z})$.

2.1.25. $F_1 = \left(\overline{x \oplus y \wedge z} \to \left(\bar{x} \to \left(z \to y\right)\right)\right) \wedge \bar{x}$; $F_2 = \overline{\bar{x} \to ((z \to y) \to x)}$.

2.1.26. $F_1 = y \to ((\bar{x} \wedge \bar{y} \to (x \leftarrow \bar{y} \wedge \bar{z})) \to x) \wedge z$; $F_2 = (x \to \bar{z}) \mid y$.

2.1.27. $F_1 = (\bar{z} \to (\bar{y} \to (x \sim z))) \wedge (z \sim (y \to (x \vee (z \to y))))$;

$F_2 = (z \to (y \to x)) \to z$.

2.1.28. $F_1 = (\bar{x} \vee \bar{y} \wedge \bar{z}) \to ((x \to z) \to (\bar{x} \to (x \vee y)))$;

$F_2 = (x \to z) \to (x \vee y \wedge (\bar{z} \to \bar{x}))$.

2.1.29. $F_1 = (\bar{x} \wedge y \vee \bar{y} \wedge z) \oplus ((x \to z) \to x \wedge \bar{y})$; $F_2 = (((\bar{x} \wedge \bar{z}) \wedge y) \sim x) \sim z$.

2.1.30. $F_1 = ((x \vee (z \to y)) \mid ((x \wedge z) \downarrow (\bar{x} \wedge \bar{z}))) \vee \bar{x}$; $F_2 = x \to ((z \to y) \to y \wedge z)$.

2.1.31. $F_1 = \overline{(x \sim z) \to (x \to \bar{y})} \vee (x \oplus y \wedge \bar{z})$; $F_2 = x \sim (y \to z)$.