Исчисление высказываний Проверка выводимости правильных умозаключений.

I Формальные системы (ФС)

$ФС = \langle \mathcal{A}, З, ППФ, А, ПВ, I \rangle$

$\mathcal{A}$ – алфавит имён

З – алфавит специальных разделительных знаков

ППФ – правильно построенные формулы из имён и знаков

$A \in ППФ$ – формулы, которые называются аксиомами

ПВ – правила вывода на множестве ППФ вида «если $\{ППФ_i\}$, то $\{ППФj\}$ »

Исчисление $I \subseteq \{ППФ\}$, такое что *I* конструктивно порождается из множества аксиом применением ПВ.

Пример 1. Формальные грамматики. $G = \langle \mathcal{A}, V, S, P \rangle$, где $\mathcal{A}$ – терминальный алфавит; V – вспомогательный алфавит; P – правила вывода, вида $\varphi_i \to \varphi_j$, где $\varphi_i, \varphi_j \in \{\mathcal{A} \cup V\}^*$ (все слова из объединённого алфавита); S – начальный вспомогательный символ (начало порождения) суть аксиома.

Грамматика G порождает (исчисляет) язык $L \subset \{\mathcal{A}\}^*$, который является множеством слов, выделенных для целей синтаксического описания моделей некоторых объектов (например, языка программирования ALGOL).

II. Формальная модель высказываний (язык высказываний)

1. $\mathcal{A}$ – алфавит имён $= \{p, q, r, s, v, w\}$.
2. Z – алфавит знаков $= \{\to, \&, \rceil, V, \oplus, \equiv$, другие знаки логических операций, $(,)$ – скобки $\}$.
3. *ППФ* суть скобочные формулы из $\mathcal{A}$ и Z, построенные по определённым правилам, например $\overline{((p \to \bar{r})\,\&\,(\bar{S} \vee \bar{r}))}$ – есть ППФ, а формула $(p \to r(\vee S))(v)$ не является ППФ. Буквами *A, B,* C и т.д. обозначаются сложные ППФ.
4. **Семантика ППФ.**

1) Каждое $p \in \mathcal{A}$ суть атомарное высказывание. Например, p – «студент спит», q – «слоны живут в Африке»

2) Каждое ППФ образует сложное высказывание, где знаком придаётся смысл логических связок между высказываниями.

$A \to B$ – смысл: если *A* то *B* (из *A* следует *B*).

$A \& B$ – смысл: *A* и *B*.

$A \oplus B$ – смысл: *A* или *B*, но не оба вместе (разделённое или).

$A \vee B$ – смысл: *A* или *B*.

$A \equiv B$ – смысл: *A* тождественно (эквивалентно) *B*.

$\rceil A$ – смысл: не *A*, другое обозначение – $\overline{A}$

Пример: p – студент спит, q – время идёт, r – лекция скучная.

Студент спит, а время идёт $\sim (p \& q)$.

Студент спит, если лекция скучная – $(r \to p)$.

5. **Интерпретация ППФ.**

1) Каждому атомарному высказыванию приписывается значение $\{"истина"\ или\ "ложь"\}$.

2) Каждой ППФ приписывается значение $и|л$ в зависимости от интерпретации связок как знаков операций. Интерпретация связок соответствует таблицам истинности ФАЛ.

Например:

A B	*A→B*
л л	*и*
л и	*и*
и л	*л*
и и	*и*

3) Если при некоторой интерпретации ППФ истинна, то она называется выполнимой на данной интерпретации.

4) Если ППФ выполнима (истинна) на всех наборах, то она называется **тождественно истинной**, либо **тавтологией**, либо **общезначимой.**

6. Другие интерпретации ППФ.

а) **Многозначные логики.** Например, каждое атомарное высказывание из ППФ и сама ППФ получают значение из множества $\{истина, ложь, не\ знаю\}$ – **троичная логика.**

б) **Правдоподобная логика.** Введена Д. Пойа в книге «Математика и правдоподобные рассуждения». ППФ принимают значения из множества $[0 \div 1]$ и интерпретируется как мера правдоподобности высказывания. Д. Пойа ввёл правила для вычисления правдоподобности сложенных высказываний по правдоподобности его составляющих.

III. Специальный вид высказываний – рассуждения или умозаключения.

Рассуждение состоит из двух высказываний «p» и «S». p – высказывание – посылка, S – высказывание – следствие, формальная запись рассуждения – $\frac{p}{S}$ читается «из p следует S», или «если P то S».Иногда высказывание S ещё называют **заключением**.

Какими свойствами наделяются правильные рассуждения? Должны соблюдаться следующие **отношения**:

а) если P = «истина», то и S должна быть = «истина».

б) если P = «ложь», то из «лжи» может следовать всё, что угодно, т.е. заключение S может быть и ложным и истинным.

в) из истинной посылки не должно следовать ложное заключение.

Все эти отношения определяют правильные или истинные рассуждения, как это показано в следующей таблице.

P	S	P/S	$P \to S$
л	л	правильное	И
л	и	правильное	И
и	л	не правильное	Л
и	и	правильное	И

Можно ввести такую интерпретацию правильного рассуждения: Если $\frac{P}{S}$ правильное, то $P \to S \equiv$ и.

Правильно построенное рассуждение является **тавтологией**. В правильном рассуждении не может быть, чтобы посылка была истинной, а заключение ложным. Эта строка в таблице истинности правильного рассуждения отсутствует. Если $\frac{P}{S}$ является тавтологией, то говорят, что рассуждение построено в соответствии с логикой и **является логическим законом**, который не зависит от интерпретации, а определяется только структурой (ППФ) посылок и следствий.

IV. Логические законы (Аристотель 384–322 д.н.э.).

Впервые в явном виде логические законы, с помощью которых можно строить правильные рассуждения были сформированы Аристотелем. Удивительно, что теория правильных рассуждений, которая называлась **силлогистикой** и метод вывода правильных заключений из посылок – **дедукция** были сформированы более 2 тысяч лет тому назад, никем не опровергнуты и считаются присущими человеческому мышлению.

Напомним, что все логические законы должны быть тавтологиями. Иногда законы называются правилами вывода, которые определяют правильный вывод из посылок.

1) **Modus ponens** (правило отделения) $\frac{A \to B, A}{B}$; смысл: если верно, что из A следует B и A является истинным, то истинно B.

Формальная запись высказывания (умозаключения, рассуждения) в виде формулы $((A \to B) \cdot A) \to B$.

Modus tollens (отрицательный марус) $\frac{A \to B, \overline{B}}{\overline{A}}$

Формальная запись $((A \to B) \cdot \overline{B}) \to \overline{A}$;

2) **Правило силлогизма** $\dfrac{A \to B,\, B \to C}{A \to C}$;

Формула высказывания $((A \to B) \cdot (B \to C)) \to (A \to C)$

3) **Закон контрпозиции** $\dfrac{A \to B}{\overline{B} \to \overline{A}}$; $(A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$

4) Все соотношения (тождества) алгебры логики суть тавтологии и поэтому являются логическими законами.

5) **Закон исключения третьего** $\dfrac{A \vee \overline{A}}{истина}$.

6) **Закон дистрибутивности** $\dfrac{A \cdot (B \vee C)}{A \cdot B \vee A \cdot C}$ и $\dfrac{A \cdot B \vee A \cdot C}{A \cdot (B \vee C)}$.

7) **Закон «гибельная дилемма»** $\dfrac{A \to B,\, B \to D,\, \overline{C} \vee \overline{D}}{\overline{A} \vee \overline{B}}$

Может быть доказана следующая теорема.

Любая формула, которая является тавтологией, может быть приведена к виду $A \to B$ и объявлена логическим законом.

Например, $F = (p \vee \overline{r}) \cdot \overline{q} \vee p \cdot q \vee \overline{p} \vee \overline{q}$ – есть тавтология, т.к. обозначив

$$F = F_1 \vee (p \cdot q \vee \overline{p} \vee \overline{q}) = F_1 \vee (p \cdot q \vee \overline{p \cdot q}) = F_1 \vee 1 \equiv 1.$$

Для представления F в форме $A \to B$ введём

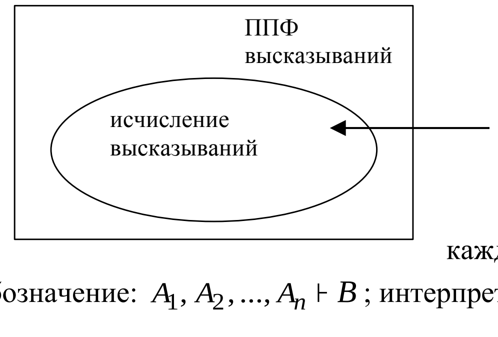
$$A = \overline{p} \vee \overline{q};\ B = (p \vee \overline{r}) \cdot \overline{q} \vee p \cdot q;\ F = \overline{A} \vee B;\ \ F = A \to B$$

$$F = (p \cdot q) \to ((p \vee \overline{r}) \cdot \overline{q} \vee p \cdot q).$$

V. Исчисление высказываний.

Наибольший интерес представляет построение формальной системы, которая среди всех возможных ППФ высказываний выделяет такие, которые являются логическими законами (правильно построенными рассуждениями, логическими умозаключениями, тавтологиями, общезначимыми высказываниями).

Формальная система, порождающая высказывания, которые являются тавтологиями и только их, называются **исчислением высказываний** (ИВ). Выше было показано, что любая формула высказываний (в том числе и тавтология) может быть приведена к структуре рассуждения (умозаключения), «если *P*, то *S*».



Общезначимые высказывания (тавтологии)

Формулы в ИВ считаются выводимыми из аксиом. В каждом выводе из тавтологий выводятся тавтологии. Обозначение: $A_1, A_2, \ldots, A_n \vdash B$; интерпретация: из $A_1, A_2, \ldots, A_n$ выводимо B.

Формальная система ИВ определяется:

$$ИВ = \langle \{аксиомы\}, ПВ - правила\ вывода \rangle$$

Формулы – аксиомы являются тавтологиями. Правила вывода в виде $A \to B$ также являются тавтологиями.

На сегодняшнее время известно ≈20 ИВ, которые отличаются друг от друга аксиомами (схемами аксиом) и правилами выводов. Все ИВ обладают 1) свойством полноты – (в них выводимы все тавтологии и только они) 2) набор аксиом обладает минимальной полнотой (т.е. удаление хотя бы одной аксиомы из набора делает ИВ неполной).

Два примера:

1) **ИВ Уйтхеда и Рассела** (1920÷1930, Англия).

Аксиомы

$$\begin{cases} \textbf{A1. } (A \vee A) \to A \text{ – закон тавтологии} \\ \textbf{A2. } A \to (B \vee A) \text{ – закон добавления} \\ \textbf{A3. } (A \vee B) \to (B \vee A) \text{ – закон перестановки} \\ \textbf{A4. } (A \vee B) \to ((C \vee A) \to (C \vee B)) \text{ – закон суммирования} \end{cases}$$

Правила вывода Р1: Подстановка A вместо B; Р2: Замена на эквивалентную формулу $A \to B \equiv \overline{A} \vee B$ Р3: Modus ponens $(A \to B, A) \vdash$ B.

2) **ИВ Никоды** (1952, США)

Единственная аксиома с операцией штрих Шеффера:

$$(A|(B|C))|\{[D|(D|D)]|[(E|B)|((A|E)|(A|E))]\};$$

единственное ПВ: $(A \cdot (A|(B|C))) \vdash C.$

VI. Методы и алгоритмы проверки выводимости.

Пусть задана совокупность ППФ $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$, которая называется посылками (иногда гипотезами), и ППФ – B. «B» называется логическим следствием $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$. или выводимой из $\mathcal{A}$ (записывается как $(\mathcal{A} \vdash B)$), если $F = (A_1 \& A_2, ..., \& A_n) \to B$ является тавтологией (тождественно истинным высказыванием).

Таким образом, задача проверки выводимости сводится к проверке $\mathcal{A} \to B$ на тождественную истинность. Существует несколько десятков методов и алгоритмов установления тождественной истинности логической формулы.

1. Алгоритм истинностных таблиц (АИТ) для *F=A→B.*

АИТ сводится к последовательной подстановке всех возможных интерпретаций (наборов «истина» и «ложь») переменных, входящих в F. Алгоритм останавливается, если значение F = ложь (F не выполнима, а значит B не выводима из A на всех интерпретациях); F = истина (F выполнима на всех интерпретациях, значит F суть тавтология и $\mathcal{A} \vdash B$. Такой алгоритм требует в наихудшем случае 2^n подстановок (2^n возможных интерпретаций), где «n» число переменных, входящих в формулу F.

Пример: формальная запись **Modus ponens** (правило отделения) $((A \to B) \cdot A) \to B$;

Проверка правильности рассуждения проводится по таблице истинности.

A	B	$(A \to B)$	$(A \to B) \cdot A)$	B	$((A \to B) \cdot A) \to B$
0	0	1	0	0	**1**
0	1	1	0	1	**1**
1	0	0	0	0	**1**
1	1	1	1	1	**1**

2. Проверка тавтологии при помощи эквивалентных преобразований.

(A → B) & A

Пример: ***Если лекция скучная, то студент спит. Лекция скучная.***

Значит: студент спит.

B

$$(((A \to B) \cdot A) \to B) = \overline{((\overline{A} \vee B) \cdot A)} \vee B = \overline{A \cdot \overline{A} \vee A \cdot B} \vee B =$$
$$= \overline{A \cdot B} \vee B = \overline{A} \vee \overline{B} \vee B = \overline{A} \vee 1 \equiv 1$$