Розділ Елементи комбінаторики

1. Основні правила та найпростіші комбінаторні формули

Якщо $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – n-елементна множина, то говорять, що один довільний елемент з A може бути обраний $|A| = n$ способами.

Нехай множина A є об'єднанням множин $A_1, \ldots, A_k$, які не перетинаються попарно:

$$A = A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \bigcup A_k, \text{ і } A_i \bigcap A_j = \varnothing \text{ при } 1 \le i \ne j \le k.$$

Нехай, далі, $a_i \in A_i$, і $|A_i| = n_i$ – потужність множини A_i ($i = 1, \ldots, k$). Тоді може бути сформульоване твердження, яке в комбінаториці називається *правилом суми*.

Правило суми. Якщо об'єкт a_1 може бути обраний n_1 різними способами, об'єкт a_2 – n_2 різними способами, …, об'єкт a_k – n_k різними способами, то вибір "або a_1, або a_2, …, або a_k" за умови, що вибір a_i виключає вибір будь-якого іншого об'єкта, може бути здійснений $n_1 + n_2 + \ldots + n_k$ способами.

Зазначене правило безпосередньо випливає з наступної рівності:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| = n_1 + n_2 + \ldots + n_k.$$

Якщо множини $A_1, \ldots, A_k$ перетинаються (містять спільні елементи), правило суми перетворюється у *правило включень та виключень*. Воно є узагальненням формули

$$|A \bigcup B| = |A| + |B| - |A \bigcap B|.$$

Правило включень та виключень. Якщо множини $A_1, \ldots, A_k$ містять спільні елементи, має місце співвідношення

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k} A_i\right| = \sum_{i=1}^{k} |A_i| - \sum_{1 \le p < q \le k} |A_p \cap A_q| +$$
$$+ \sum_{1 \le p < q < r \le k} |A_p \cap A_q \cap A_r| - \ldots + (-1)^{k-1} |A_1 \cap \ldots \cap A_k|.$$

Нехай є N об'єктів, кожен з яких володіє певними властивостями з даної їх сукупності $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ і не має інших властивостей з цієї сукупності. Позначимо через $N(\alpha_i, \alpha_j, \ldots, \alpha'_k, \alpha'_l, \ldots)$ кількість об'єктів, які мають властивості $\alpha_i, \alpha_j, \ldots$ і не мають властивостей $\alpha_k, \alpha_l, \ldots$.

Загальна формула включень та виключень підраховує кількість об'єктів, позбавлених усіх без виключення властивостей, і має такий вигляд:

$$
\begin{aligned}
N(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - \ldots - N(\alpha_n) + \\
+ N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n) - \\
- N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - N(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4) - \ldots - N(\alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_n) + \\
+ (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n).
\end{aligned}
$$

Додатково припустимо, що кількість об'єктів з будь-якими властивостями залежить тільки від кількості цих властивостей, а не від їхнього типу. За вказаним обмеженням формула включень та виключень набуває вигляду

$$N(\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n) = N - C_n^1 N^{(1)} + C_n^2 N^{(2)} - \ldots - (-1)^n C_n^n N^{(n)},$$

де $N^{(k)}$ – кількість об'єктів, які мають k певних властивостей.

Наведемо, далі, ще одне важливе правило комбінаторики – *правило добутку*:

Правило добутку. Якщо об'єкт a_1 може бути обраний n_1 способами, після будь-якого вибору a_1 об'єкт a_2 може бути обраний n_2 способами, і далі, для будь-якого i, що задовольняє умову $2 \le i \le k - 1$, після вибору об'єктів a_1, a_2, …, a_i, об'єкт a_{i+1} може бути обраний n_{i+1} способами, то вибір упорядкованої сукупності (a_1, a_2, …, a_k) з k об'єктів може бути здійснений рівно $n_1 n_2 \ldots n_k$ способами.

Правила суми й добутку є досить очевидними. Застосування цих правил може спростити доведення деяких комбінаторних співвідношень.

1.01. Довести справжність співвідношення $\left|B^k\right| = 2^k$, де B^k – множина двійкових наборів виду $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$.

Роз'вязання. Елемент x_1 обирається двома способами ($n_1 = 2$) і кожен наступний – при вже обраних усіх попередніх – так само двома способами ($n_2 = n_3 = \ldots = n_k = 2$). Тому $\left|B^k\right| = \underbrace{2 \times 2 \times \ldots \times 2}_{k \text{ множників}} = 2^k$. □

Під комбінаторною конфігурацією розуміють виділену з даної дискретної сукупності елементів частину, яка задовольняє деяким зафіксованим властивостям. Головною проблемою при розв'язанні практичних комбінаторних задач є визначення типу комбінаторної конфігурації, яка має місце у розв'язуваній задачі. При цьому однією з основних задач комбінаторики є обчислення кількості можливих комбінаторних конфігурацій, які можна утворити для даної сукупності елементів.

Розміщення, перестановки, сполучення.

Нехай $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ – базова n-елементна сукупність.

Розміщенням без повторень з n елементів по k елементах називають будь-яку впорядковану сукупність k елементів, обраних із сукупності A. Зазначену конфігурацію називають також *вибіркою без повернень*.

Число різних розміщень без повторень з n елементів по k визначається формулою

$$A_n^k = \underbrace{n(n-1)\ldots(n-k+1)}_{k \text{ множників}}, \text{ або } A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$$

при $0 \le k \le n$ $\left(\text{за означенням} \quad n! = \begin{cases} 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n, & \text{якщо } n \in N \\ 1, & \text{якщо } n = 0 \end{cases} \right)$.

Розміщення з повтореннями (або *вибірка з поверненнями*) з n елементів по k елементах передбачає повернення раніше обраного елемента до базової сукупності й, у зв'язку з цим, можливість повторної появи цього елемента серед обраних.

Число різних розміщень з повтореннями з n елементів по k визначається формулою

$$\overline{A}_n^k = \underbrace{n \cdot n \cdot \ldots \cdot n}_{k \text{ множників}} = n^k$$

при $0 \le k \le n$.

Перестановка – це окремий випадок розміщення при $k = n$. Число різних перестановок без повторень з n елементів знаходять за формулою

$$P_n = n!\ ,$$

яка є безпосереднім наслідком формул для A_n^k.

При наявності повторень (серед елементів базової сукупності є однакові) зміна місць однакових елементів не дає нових комбінацій, і кількість можливих перестановок у цьому випадку зменшується.

Нехай базова n-елементна сукупність A складається з k груп нерозрізнюваних елементів; притому перша група містить n_1 однакових елементів, друга – n_2 однакових елементів, …, k-та група – n_k однакових елементів ($n_1 + n_2 + \ldots + n_k \le n$); решта елементів кількістю ($n - (n_1 + n_2 + \ldots + n_k)$) є різними. Тоді загальну кількість різних перестановок можна визначити формулою

$$\overline{P}_n(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Наслідок: якщо n елементів базової сукупності поділяються у точності на дві групи, які містять відповідно m і $(n-m)$ однакових елементів, формула для числа перестановок з повтореннями набуває вигляду

$$\overline{P}(n, n-m) = \frac{n!}{m! \cdot (n-m)!}.$$

Сполученням з n елементів по k елементах називають будь-яку неупорядковану сукупність з k ($k \le n$) елементів сукупності A.

Сполучення – одна з найчастіше застосовуваних у математиці комбінаторних комбінацій.

Число різних сполучень без повторень з n елементів по k визначається формулою

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!}, \text{ або } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

при $0 \le k \le n$.

Із застосуванням зазначених формул безпосередньо перевіряються співвідношення

$$C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k.$$

Зафарбувавши частину клітинок прямокутної таблиці за зразком, який показано в табл. 1, заповнимо незафарбовані клітинки за наступним правилом.

Таблиця 1

						1						
					1		1					
				1		2		1				
			1		3		3		1			
		1		4		6		4		1		
	1		5		10		10		5		1	
–		–		–		–		–		–		–

1) В єдиній клітинці першого рядка пишемо значення $C_0^0 = 1$.

2) По краях другого рядка пишемо значення $C_1^0 = 1$ і $C_1^1 = 1$.

3) По краях третього рядка пишемо значення $C_2^0 = 1$ і $C_2^2 = 1$, а між ними – значення $C_2^1 = 2$; при тому звертаємо увагу на те, що це значення

дорівнює сумі чисел попереднього рядка, які розміщені ліворуч та праворуч від нього, відповідно до співвідношення $C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2$.

4) За таким же правилом заповнюємо наступні рядки: по краях пишемо значення $C_n^0 = C_n^n = 1$, а всі проміжні значення одержуємо як суми двох чисел попереднього рядка, що розміщені ліворуч та праворуч від обчислюваного значення.

Результатом заповнення цієї таблиці є деяка частина нескінченної числової конфігурації, яка називається *арифметичним трикутником* або *трикутником Паскаля*.

Зазначимо деякі властивості цього трикутника. Підрахуємо три суми: суму чисел n-го рядка трикутника й суми чисел (n + 1)-го рядка через одне, розміщених на непарних або парних позиціях. В усіх трьох випадках одержимо одне й те саме число; цю властивість запишемо у виді

$$C_n^0 + C_n^2 + C_n^4 + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + \ldots = C_{n-1}^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-1}^2 + \ldots + C_{n-1}^{n-1}.$$

Зокрема, звідси випливає, що сума чисел (n + 1)-го рядка вдвічі більше суми чисел n-го рядка. Враховуючи те, що сума чисел першого рядка дорівнює 1, для (n + 1)-го рядка одержимо суму, рівну 2^n:

$$C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n.$$

Без доведення наведемо ще дві властивості сполучень:

$$C_{n-1}^0 + C_n^1 + C_{n+1}^2 + \ldots + C_{n+m-1}^m = C_{n+m}^m,$$

$$C_n^n + C_{n+1}^n + C_{n+2}^n + \ldots + C_{n+m-1}^n = C_{n+m}^{n+1}. \quad (1)$$

Звідси, зокрема,

$$1 + 2 + 3 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2} = C_{m+1}^2. \quad (2)$$

Сполученням з повтореннями елементів з n-елементної сукупності $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ по k елементах називають неупорядкований набір з k елементів, що належать A, в якому допускаються повторення однакових елементів.

Число різних сполучень з повтореннями з n елементів по k визначається формулою

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)(n+k-2)\ldots(n+1)n}{k!}.$$

Ця формула є наслідком того, що шукане число сполучень з повтореннями з n елементів по k дорівнює числу сполучень без повторень з $(n+k-1)$ елементів по $(n-1)$, тобто

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{n-1} = C_{n+k-1}^{(n+k-1)-(n-1)} = C_{n+k-1}^k.$$

Розглянуті сполучення з повтореннями допускають відсутність певних елементів у відповідній комбінації. Обмежуючи таку можливість, поставимо вимогу про обов'язкове входження кожного елемента базової сукупності до створюваного сполучення (інакше кажучи, вимогу про те, щоб кожен елемент зустрівся в ньому принаймні один раз).

Число різних сполучень з повтореннями, з обов'язковим входженням кожного елемента базової сукупності, з n елементів по k визначається формулою

$$\tilde{C}_n^k = C_{k-1}^{n-1} = \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{(n-1)!}.$$

Загальне число зазначених сполучень буде визначається кількістю способів відібрати з повтореннями $(k-n)$ елементів з n елементів:

$$\tilde{C}_n^k = \overline{C}_n^{k-n} = C_{n+(k-n)-1}^{k-n} = C_{k-1}^{k-n} = C_{k-1}^{(k-1)-(k-n)} = C_{k-1}^{n-1}.$$

Поряд зі звичайними перестановками розглядають так звані *зміщення* – перестановки певного числа елементів, з яких жоден не залишається у первинному місці.

Нехай базова сукупність містить n елементів. Загальне число перестановок-зміщень, які змінюють місця всіх n елементів даної сукупності, визначається формулою

$$D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Число перестановок-зміщень $D_{n,r}$ з n елементів, при яких рівно r елементів залишаються на первинних місцях, а інші (n – r) елементів обов'язково змінюють свої місця, дорівнює

$$D_{n,r} = C_n^r \cdot D_{n-r}.$$

1.02. Студенти вивчають 8 дисциплін. Скільки існує способів складання розкладу занять на п'ятницю, якщо в цей день тижня повинні бути три різні пари?

Роз'вязання. В задачі йдеться про комбінації з 8 елементів по 3, які відрізняються одна від одної або елементами, або їхним порядком, тобто про розміщення з 8 елементів по 3. Число таких комбінацій визначається формулою $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$. □

1.03. Скількома способами можна відібрати 5 студентів для роботи в математичному гуртку, якщо у підгрупі 15 студентів?

Роз'вязання. В задачі розглядаються комбінації з 15 елементів по 5, які повинні відрізнятися одна від одної елементами, що до них входять, тобто сполучення з 15 елементів по 5. Їхня кількість визначається формулою $C_{15}^5 = \frac{A_{15}^5}{P_5} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 3003.$ □

1.04. На залізничній станції є 4 світлофора. Скільки може бути подане різних сигналів, якщо кожен світлофор має 3 становища: червоне, жовте і зелене?

Роз'вязання. Розглядаються розміщення з повтореннями з 3 елементів по 4. Їх число визначається формулою $\overline{C}_3^4 = 3^4 = 81.$ □

1.05. Скільки різних слів (у тому числі беззмістовних) можна отримати, переставляючи букви слова "математика"?

Роз'вязання. Розглядаються перестановки з повтореннями з 10 елементів: буква 'а' повторюється в даному слові 3 рази, букви 'м' і 'т' – по 2 рази кожна. Число зазначених перестановок у цьому випадку визначається формулою $\overline{P}_{10}(3,2,2)=\frac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}=151200$. □

1.06. Скількома способами можна вибрати 8 тістечок, якщо у наявності є 5 різних сортів?

Роз'вязання. Розглядаються сполучення з 5 елементів по 8, серед яких є однакові (сполучення з повтореннями). Їхнє число визначається формулою $\overline{C}_5^8=C_{12}^8=C_{12}^4=\frac{A_{12}^4}{P_4}=\frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=495$. □

<u>Індивідуальні завдання</u>. Використовуючи відповідні формули для знаходження числа перестановок, розміщень та сполучень без повторень і з повтореннями, розв'язати задачі 1.07 – 1.36.

1. У групі 25 студентів. Скільки існує можливостей вибрати старосту і профорга за умови, що кожний студент може виконувати лише одне з цих доручень?

2. Скільки треба мати словників, щоб можна було робити переклади з будь-якої із п’яти іноземних мов на будь-яку іншу з них?

3. Група студентів вивчає 7 учбових дисциплін. Скількома способами можна скласти розклад занять у понеділок, якщо у цей день тижня повинно бути 4 різних заняття?

4. Скільки можна утворити цілих чисел, з яких кожне записувалося б трьома різними значущими цифрами?

5. Скільки можна утворити цілих чисел, з яких кожне записувалося б трьома різними цифрами?

6. Скількома способами можна присудити 1-е, 2-е і 3-є місця на олімпіаді з математики, в якій беруть участь 30 студентів?

7. Скільки шестизначних чисел, кратних п'яти, можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6 за умови, що у числі цифри не повторюються?

8. Скількома способами можна розмістити 10 студентів за круглим столом?

9. Скількома способами можна посадити за круглий стіл 5 чоловіків і 5 жінок так, щоб жодні 2 особи однієї статі не сиділи поруч?

10. На п'ять співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розділити, якщо всі путівки різні?

11. На п'ять співробітників хімічної лабораторії виділено три оздоровчі путівки. Скількома способами їх можна розділити, якщо всі путівки однакові?

12. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох осіб для чергування, якщо один з них має бути старшим?

13. У групі 30 студентів. Скількома способами можна виділити двох осіб для чергування, якщо посаду старшого чергового не передбачено?

14. У лабораторії 18 студентів. З них 6 слід посадити за перший стіл. Скільки усіх випадків може бути, якщо не зважати на порядок розташування студентів за столом?

15. З десяти кандидатів на одну й ту ж посаду слід вибрати трьох. Скільки може бути різних випадків обрання?

16. Групу студентів повинна екзаменувати з математики комісія з двох викладачів. Скількома способами може бути складена екзаменаційна комісія, якщо на кафедрі 5 викладачів математики?

17. В турнірі брали участь 10 шахістів, і кожні 2 з них зустрічалися один раз. Скільки шахових партій зігране в турнірі?

18. Скільки матчів буде зігране у футбольному чемпіонаті за участю 16 команд, якщо кожні дві команди зустрічаються між собою два рази?

19. У взводі 3 сержанти і 30 солдатів. Скількома способами можна виділити одного сержанта і трьох солдатів для патрулювання?

20. 25 учасників річних зборів акціонерів претендують на посади голови, секретаря, скарбника та 4 інші посади у правлінні. Визначити, скільки існує способів заміщення вакантних місць претендентів?

21. З 25 учасників річних зборів акціонерів потрібно обрати правління з 7 чоловік і комісію з 3 чоловік. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо члени правління можуть входити до складу комісії?

22. З 25 учасників річних зборів акціонерів потрібно обрати правління з 7 чоловік і комісію з 3 чоловік. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо члени правління не можуть входити до складу комісії?

23. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви слова "комбінаторика"?

24. Скільки різних слів можна скласти, переставляючи букви слова "знання"?

25. Скількома способами можна розставити білі шахові фігури (2 коня, 2 слона, 2 тури, ферзя й короля) на першій лінії шахової дошки?

26. У мами 3 яблука, 2 груші та 5 апельсинів. Щодня протягом 10 днів вона видає сину по одному фрукту. Скількома способами це може бути зроблене?

27. Підприємству необхідно придбати 7 комп'ютерів. У магазині є комп'ютери 4 різних моделей. Скількома способами підприємство може реалізувати свою покупку?

28. Покупець бере в магазині 5 електричних лампочок 3 різних номіналів. Скількома способами можна здійснити вибір лампочок?

29. Скількома способами можна вибрати 6 тістечок, якщо у наявності є 4 різні сорти?

30. П'ятеро студентів складають іспит. Скількома способами їм можуть бути поставлені оцінки, якщо відомо, що ніхто з них не одержав незадовільної оцінки?