Алгебра Жегалкіна

Алгебра над множиною логічних функцій з двома бінарними операціями $\wedge$ і $\oplus$ називається алгеброю Жегалкіна. Вказаним операціям притаманні наступні властивості:

$$x \oplus y = y \oplus x;$$

$$x(y \oplus z) = xy \oplus xz;$$

$$x \oplus x = 0;$$

$$x \oplus 0 = x.$$

Зазначимо можливість виразити заперечення та диз'юнкцію за допомогою операцій $\wedge$ і $\oplus$:

$$\bar{x} = x \oplus 1,$$

$$x + y = xy \oplus x \oplus y$$

(останню формулу пояснюють такі перетворення:

$$x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}} = (x \oplus 1)(y \oplus 1) \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y \oplus 1 \oplus 1 = xy \oplus x \oplus y).$$

Ця можливість свідчить про те, що система функцій ($xy,\ x \oplus y$), на який ґрунтується алгебра Жегалкіна, є функціонально повною системою.

Якщо у довільній формулі алгебри Жегалкіна, яка представляє певну логічну функцію, розкрити дужки та здійснити всі можливі спрощення, отримана таким чином формула матиме вигляд суми добутків, тобто полінома за модулем 2. Цей поліном називається поліномом Жегалкіна даної функції.

Приклад 10.1. Функцію $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(\bar{x}_2 + x_1 x_3)$ представити у виді полінома Жегалкіна.

Розв'язання. Розкриваючи в даній функції дужки й враховуючи закони алгебри логіки, властивості операцій алгебри Жегалкіна та формули, які через ці операції виражають заперечення й диз'юнкцію, матимемо:

$$
\begin{aligned}
&(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)=x_1\bar{x}_2+x_1x_1x_3+x_2\bar{x}_2+x_1x_2x_3=x_1\bar{x}_2+x_1x_3+x_1x_2x_3=\\
&\quad=(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)+x_1x_2x_3=\\
&\quad=(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)x_1x_2x_3\oplus(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)\oplus x_1x_2x_3=\\
&\quad=x_1x_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3=\\
&\quad=x_1(x_2\oplus 1)x_3\oplus x_1(x_2\oplus 1)\oplus x_1x_3=x_1x_2x_3\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus x_1x_3=\\
&\quad=x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\,.
\end{aligned}
$$

Таким чином, поліном Жегалкіна для даної функції має вигляд

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3\,.$$

Теорема 10.1. Для всякої логічної функції існує поліном Жегалкіна й притім єдиний.

Доведення. Існування вказаного полінома випливає із зазначеної вище можливості шляхом певних перетворень отримати для даної функції формулу, яка буде представлена у виді суми ($\oplus$) добутків ($\wedge$). Для доказу одиничності покажемо, що між множиною всіх функцій від n змінних і множиною всіх поліномів Жегалкіна від n змінних існує взаємно однозначна відповідність. Число різних членів (тобто кон’юнкцій змінних) поліномів від n змінних дорівнює числу всіх підмножин з n елементів, тобто 2^n (порожній підмножині відповідає член 1). Число різних поліномів, які можна створити з цих кон’юнкцій, дорівнює числу всіх підмножин множини кон’юнкцій, тобто 2^{n^n} (порожній підмножині кон’юнкцій відповідає поліном 0). Таким чином, число всіх поліномів Жегалкіна від n змінних дорівнює числу всіх логічних функцій від n змінних. Оскільки різним функціям відповідають різні поліноми (одна й та сама формула не може представляти дві різні функції), те тим самим між множиною логічних функцій і множиною поліномів від n змінних встановлено взаємно однозначну відповідність, що й доводить одиничність полінома для кожної функції.