Відповідності. Потужність множин

Прямим (*декартовим*) *добутком* множин A і B ($A \times B$) називається множина всіх упорядкованих пар елементів (a,b), з яких перший належить множині A, а другий – множині B:

$$A \times B = \{(a,b) \mid a \in A \text{ і } b \in B\}.$$

Зауважимо, що зазначені пари упорядковані – розташування елементів у кожній парі визначається порядком множин, що перемножуються. Ці пари можуть бути інтерпретовані геометрично у вигляді *двовимірних векторів*, *компонентами* (*координатами*) яких є елементи, що складають пару.

Приклад: для множин $A = \{1,2,3\}$ і $B = \{3,4\}$ декартовий добуток складається з шості упорядкованих пар і має наступний вид: $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,3),(3,4)\}$.

Якщо $B = A$, те $A \times A = A^2$ – *декартовий квадрат* множини A. Декартовий квадрат множини R дійсних чисел ($R \times R = R^2$) має геометричну інтерпретацію у вигляді множини точок (x, y) координатної площини ($x \in R$ і $y \in R$ – координати цих точок).

Аналогічно визначається декартовий добуток множин A_1, A_2, …, A_n : $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) \mid a_1 \in A_1 \text{ і } a_2 \in A_2 \text{ і } \ldots \text{ і } a_n \in A_n\}$ та декартовий n-ий степінь множини A: $A^n = A \times A \times \ldots \times A$. Декартовий куб множини R дійсних чисел ($R \times R \times R = R^3$) має геометричну інтерпретацію у вигляді множини точок (x, y, z) трьохвимірного координатного простору ($x \in R$, $y \in R$ і $z \in R$ – координати цих точок).

Координати вектора $\bar{v} = (a,b)$ називають його проекціями на відповідну координатну вісь: $a = \text{Пр}_1\bar{v}$, $b = \text{Пр}_2\bar{v}$

Нехай V – деяка множина двовимірних векторів $\bar{v} = (a,b)$. Множини $\text{Пр}_1 V = \{\text{Пр}_1\bar{v} \mid \bar{v} \in V\}$ і $\text{Пр}_2 V = \{\text{Пр}_2\bar{v} \mid \bar{v} \in V\}$ називають проекціями множини V на відповідну координатну вісь.

Відповідністю між множинами A і B називається підмножина $G \subseteq A \times B$. Якщо $(a,b) \in G$, те говорять, що b відповідає a за відповідністю G. Множину $\text{Пр}_1 G$ називають *областю визначення* відповідності, а множину $\text{Пр}_2 G$ – її *областю значень*.

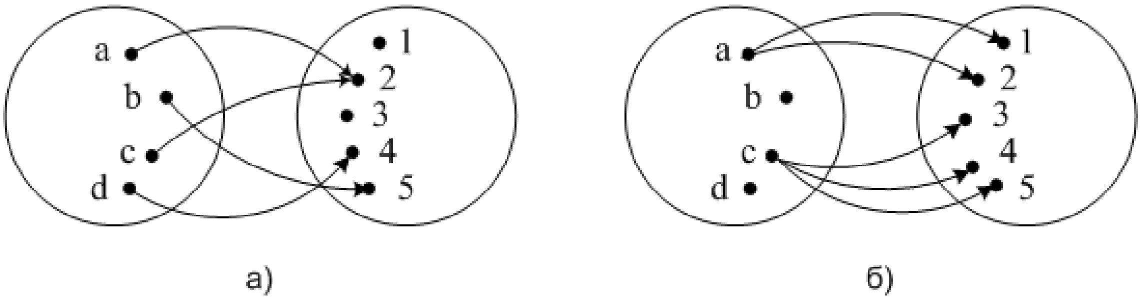

Рис. 1.2

Розглянемо наступний приклад. Нехай є множини $A = \{a,b,c,d\}$ і $B = \{1,2,3,4,5\}$ та дві відповідності $K = \{(a,2),(b,5),(c,2),(d,4)\}$ (рис.1.2а) і $L = \{(a,1),(a,2),(c,3),(c,4),(c,5)\}$ (рис.1.2б). Для цих відповідностей маємо таки області визначення й значень:

$$\text{Пр}_1 K = \{a,b,c,d\},\ \text{Пр}_2 K = \{2,4,5\};$$

$$\text{Пр}_1 L = \{a,c\},\ \text{Пр}_2 L = \{1,2,3,4,5\}.$$

Якщо $\text{Пр}_1 G = A$, те відповідність називається *всюди* (*повністю*) *визначеною* (відповідність K наведеного прикладу); якщо ж $\text{Пр}_1 G \neq A$ – вона *частково визначена* (відповідність L). Якщо $\text{Пр}_2 G = B$, відповідність *сюр'єктивна* (відповідність L). Множина всіх $b \in B$, які відповідають елементу $a \in A$, називається *образом* елемента a у множині B за відповідністю G. Множина всіх a, яким відповідає b, називається *прообразом* b в A за відповідністю G. Відповідність G називається *функціональною* (*однозначною*), якщо образом будь-якого елемента з $\text{Пр}_1 G$ є єдиний елемент з $\text{Пр}_2 G$ (відповідність K); відповідність G називається *ін'єктивною*, якщо прообразом будь-якого елемента з $\text{Пр}_2 G$ є єдиний елемент з $\text{Пр}_1 G$ (відповідність L). Відповідність G називається *взаємно однозначною* (*бієктивною*), якщо вона всюди визначена, сюр'єктивна, функціональна та ін'єктивна (рис.1.3). На рис.1.4 проілюстровано порушення кожної з властивостей, які визначають взаємно однозначну властивість.

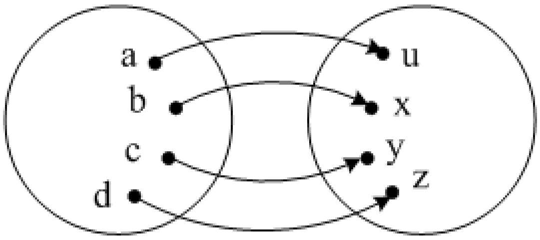

Рис. 1.3

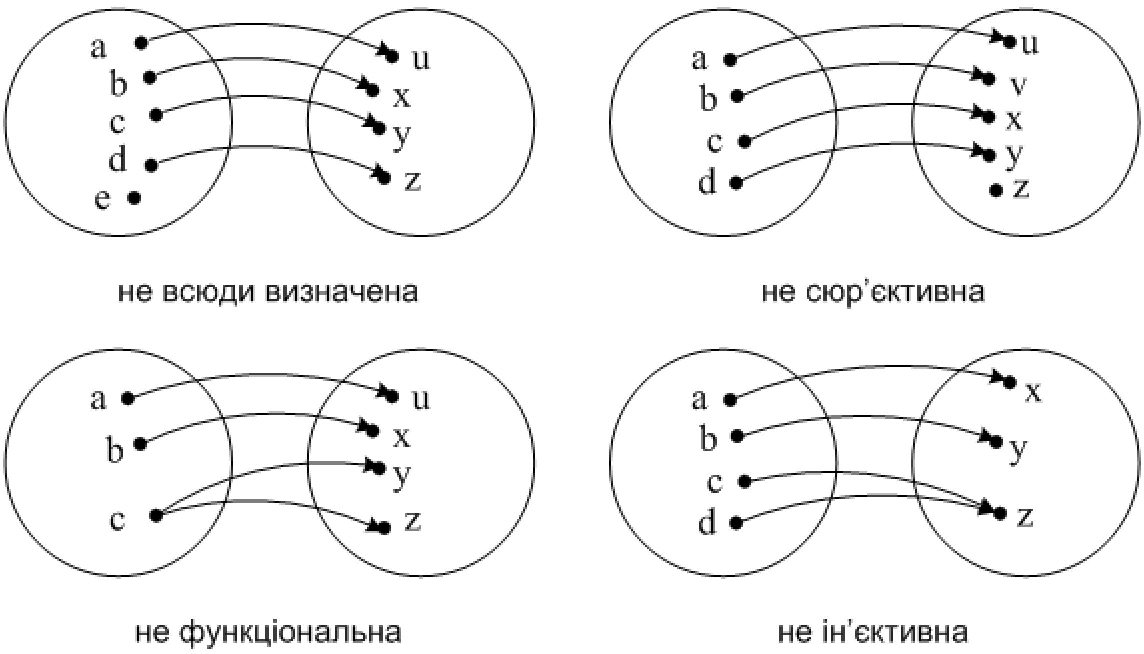

Рис. 1.4

Наведемо деякі приклади реальних відповідностей.

1. Позиція на шаховій дошці є взаємно однозначною відповідністю між множиною розташованих на дошці фігур і множиною зайнятих ними полів.
2. Англійсько-український словник встановлює відповідність між множинами англійських та українських слів. Ця відповідність не є функціональною (одному англійському слову частіше за інше

ставляться у відповідність декілька українських слів) і є частково визначеною (завжди можна знайти такі англійські слова, які відсутні в даному словнику).

3. Будь-яка система кодування інформації (представлення букв абеткою Морзе, представлення чисел в різних системах числення, таємні шифри тощо) є відповідністю між множиною об'єктів, які кодуються, та множиною кодів, що їм присвоюються. Зазначена відповідність має всі властивості взаємної однозначності, крім сюр'єктивності (існують коди, які не мають змісту, тобто не відповідають жодному об'єкту).

Відображення й функції. Суперпозиція відповідностей і функцій. Обернена відповідність і обернена функція

Функцією називається функціональна відповідність. Якщо функція f установлює відповідність між множинами A і B, те позначення $f:\ A \to B$ говорить про те, що кожному елементу a зі своєї області визначення (множини A) функція f ставить у відповідність єдиний елемент b з області значень (множини B). Використовується також добре відомий запис $f(a)=b$. Елемент a називається аргументом функції, b – відповідним значенням функції. Повністю визначена функція $f:\ A \to B$ називається відображенням A в B. Якщо відповідність f при цьому сюр'єктивна, тобто кожен елемент з B має прообраз в A, те говорять, що має місце відображення A на B (сюр'єктивне відображення).

Приклади. 1. Функція $f(x)=2^x$ є відображенням N в N і N_0 на множину $\{x \mid x=2^n \text{ і } n \in N_0\}$.

2. Функція $f(x)=\sqrt{x}$ частково визначена у випадку $N \to N$, і повністю визначена у випадку $N \to R$ або $R_+ \to R$ (R_+ – додатна підмножина R).

Нехай дані відповідності $P \subseteq A \times B$ і $Q \subseteq B \times C$. Якщо відповідність $T \subseteq A \times C$ така, що $(a,c) \in T$ тоді й тільки тоді, коли $(a,b) \in P$ і $(b,c) \in Q$, те відповідність T називається суперпозицією відповідностей P і Q та позначається $T = P \circ Q$. Якщо відповідності P і Q функціональні, те відповідність T є також функціональною; функція $t: A \to C$ називається в цьому випадку *суперпозицією* (або *композицією*) функцій $p: A \to B$ і $q: B \to C$

Нехай дана відповідність $G \subseteq A \times B$. Якщо відповідність $H \subseteq B \times A$ така, що $(b, a) \in H$ тоді і тільки тоді, коли $(a, b) \in G$, те відповідність H називається оберненою до G і позначається G^{-1}. Якщо відповідність, обернена до функції $f: A \to B$, є функціональною, те вона називається функцією, *оберненою* до f, і позначається f^{-1}. Оскільки в оберненій відповідності образи і прообрази міняються місцями, те для існування функції, оберненої до $f: A \to B$, потрібно, щоб кожен елемент b з області значень f мав єдиний прообраз. Це, у свою чергу, означає, що для функції $f: A \to B$ обернена функція існує тоді і тільки тоді, коли f є взаємно однозначною відповідністю між своєю областю визначення й областю значень.