Предикати та операції з ними

Речення, в яке входять змінні і яке при заміні змінних можливими для них значеннями стає висловленням, називається *висловлювательною формою* або *предикатом*.

При заданні предиката має бути зазначеною множина X тих значень, що можуть приймати змінні; вона називається *областю визначення предиката* або *предметною областю*. Змінні, які містить предикат, називаються предметними змінними.

Якщо предикат містить лише одну змінну, він називається одномісним; при наявності n змінних предикат називається n-місним. Число змінних, що містить предикат, називають також його порядком.

Нехай X – область визначення предиката. Підмножина множини X, яка складається з тих значень змінних, при яких даний предикат перетворюється в істинне висловлення, називається *множиною* (або *областю*) *істинності предиката*.

Одномісні предикати з однією змінною x позначають як $P(x)$, $Q(x)$, ...; двомісні з двома змінними x, y – як $P(x, y)$, $Q(x, y)$, …; n-місні – у вигляді $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Для скорочення записів замість $P(x)$, $P(x, y)$, … часто пишуть просто P. Множину істинності предиката P позначають тією же буквою, що і сам предикат, але з верхнім індексом +, тобто P^+.

Предикат з областю визначення X називається *тотожно істинним*, якщо при будь-яких значеннях змінних з X він перетворюється в істинне висловлення, і *тотожно хибним*, якщо при будь-яких значеннях змінних з X він перетворюється в хибне висловлення.

Два предикати з однієї і тією же областю визначення X називаються *рівносильними,* якщо вони мають однакові множини істинності. Рівносильність предикатів P і Q позначається так: $P \sim Q$.

Нехай P і Q – два предикати із спільною областю визначення X. Говорять, що предикат Q є наслідком предиката P, якщо область істинності предиката P є частиною області істинності предиката Q (або збігається з нею), тобто якщо $P^+ \subseteq Q^+$.

Над предикатами здійснюються ті ж самі логічні операції, що і над висловленнями: заперечення, кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквівалентність.

Заперечення предиката $P(x)$ з областю визначення X позначимо $\overline{P}(x)$ і зауважимо: предикат $\overline{P}(x)$ (читається: "Невірно, що $P(x)$") має ту ж саму область визначення X і множину $X \setminus P^+$ як область істинності.

Кон'юнкція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \wedge Q(x)$ (читається "$P(x)$ і $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^+ \bigcap Q^+$.

Диз'юнкція предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \vee Q(x)$ (читається "$P(x)$ або $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^+ \bigcup Q^+$.

Імплікація предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, визначених відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \rightarrow Q(x)$ (читається "Якщо $P(x)$, то $Q(x)$" або "Із $P(x)$ випливає $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $P^- \bigcup Q^+$.

Еквівалентність предикатів $P(x)$ і $Q(x)$, що визначені відповідно на множинах X_1 і X_2, позначається $P(x) \sim Q(x)$ (читається: "$P(x)$ тоді і тільки тоді, коли $Q(x)$"), має область визначення $X = X_1 \bigcap X_2$ і область істинності $(P^+ \bigcap Q^+) \bigcup (P^- \bigcap Q^-)$.

Розглянуті логічні операції над предикатами у певному сенсі аналогічні відповідним операціям над висловленнями. Однак оскільки поняття предиката істотно ширше, ніж поняття висловлення (предикат перетворюється у висловлення лише при фіксованих значеннях змінних, що входять до нього), для предикатів існують операції, які не мають аналогів серед операцій над висловленнями. Це – так звані кванторні операції. Кожна з них застосовується до одномісного предиката й перетворює його у висловлення.

Операцією *квантор загальності* називається правило, яке кожному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині X, ставить у відповідність висловлення, що позначається $\forall x P(x)$ (читається: "Для всіх x справедливо $P(x)$") і є істинним тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно істинний.

У випадку, коли множина X, на якій визначено предикат $P(x)$, скінченна й складається з елементів a_1, a_2, …, a_n , висловлення $\forall x P(x)$ рівносильне кон'юнкції всіх висловлень $P(a_1)$, ..., $P(a_n)$; інакше кажучи, висловлення $\forall x P(x)$ має ті ж самі значення істинності, що і висловлення $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ldots \wedge P(a_n)$.

Операцією *квантор існування* називається правило, яке кожному одномісному предикату $P(x)$, визначеному на множині X, ставить у відповідність висловлення, що позначається $\exists x P(x)$ (читається: "Існує значення $x \in X$ таке, що вірно $P(x)$") і є хибним тоді і тільки тоді, коли предикат $P(x)$ тотожно хибний.

Самі символи $\forall$ і $\exists$ також називають кванторами загальності та існування, а приєднання їх до предиката $P(x)$ часто називають "навішуванням" відповідного квантора на предикат $P(x)$.

У висловленнях $\forall x P(x)$ і $\exists x P(x)$ змінна x перестає бути змінною у звичайному змісті цього слова: на її місце вже не можна підставляти конкретні елементи з множини X. Змінну x у зазначеній ситуації називають *зв'язаною*. Замість x можна вжити будь-яку іншу букву, наприклад y; інакше кажучи, висловлення $\forall x P(x)$ і $\forall y P(y)$ однакові.

Візьмемо до уваги, що у виразах, де область дії квантора не визначено дужками, квантор має найвищий пріоритет; тому спочатку виконується квантифікація, а потім діють інші логічні операції.

"Навішування" кванторів можливо й у випадку багатомісних предикатів. При цьому кожна змінна повинна бути зв'язана тільки одним квантором. Наприклад, у випадку двомісного предиката $P(x, y)$ можна розглянути наступні висловлення:

$$\exists x \exists y\, P(x,y), \quad \exists x \forall y\, P(x,y), \quad \forall x \exists y\, P(x,y), \quad \forall x \forall y\, P(x,y)$$

(перше з цих висловлень читається так: "Існують таке x і таке y, при яких справедливо $P(x, y)$"; аналогічно читаються інші три висловлення).

3.2.01. На універсумі $U = \{-5\,..\,7\}$ визначені предикати $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$ з наведеними нижче областями істинності:

$$P^+ = \{x \mid x \neq 3k \wedge k \in Z \wedge x \in U\}, \qquad Q^+ = \{x \mid x = 2k+1 \wedge k \in Z \wedge x \in U\},$$

$$R^+ = \{x \mid x = 3k-2 \wedge k \in Z \wedge x \in U\}, \quad S^+ = \{-2,-1,1,2,3,4,5\}.$$

Потрібно:

а) застосовуючи закони алгебри множин, виразити множину, яка є областю істинності предиката $T(x) = \left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$, через області істинності предикатів $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$, $S(x)$;

б) знайти елементи цієї множини;

в) для перевірки отриманого результату побудувати таблицю істинності предиката $T(x)$.

<u>Розв'язання.</u> а) Для того щоб отримати зажадане подання області істинності предиката $\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$, виконуємо послідовно відповідні операції з множинами P^+, Q^+, R^+, S^+, що запропоновані як області істинності окремих операндів предиката $T(x)$.

$$\left[\underbrace{\overline{P(x) \vee Q(x)}}_{\text{закон де Моргана}}\right]^+ = \left[\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}\right]^+ = \left[\overline{P(x)}\right]^+ \cap \left[\overline{Q(x)}\right]^+ =$$

$$= (\underbrace{U \setminus P^+}_{U \setminus X \equiv U \cap \overline{X}}) \cap (\underbrace{U \setminus Q^+}_{U \setminus X \equiv U \cap \overline{X}}) = \underbrace{(U \cap \overline{P^+}) \cap (U \cap \overline{Q^+})}_{\text{асоціативний закон; } U \cap U \equiv U} =$$

$$= \underbrace{U \cap P^- \cap Q^-}_{U \cap X \equiv X} = P^- \cap Q^- = \{0, 6\}.$$

$$\left[\overline{R(x)} \vee Q(x)\right]^+ = \left[\overline{R(x)}\right]^+ \bigcup \left[Q(x)\right]^+ = (U \setminus R^+) \bigcup Q^+ = (U \bigcap R^-) \bigcup Q^+ =$$
$$= R^- \bigcup Q^+ = \{-5..-3, -1..3, 5..7\}.$$

Узявши формулу для знаходження області істинності предиката-еквівалентності $[A(x) \sim B(x)]^+ = (A^+ \bigcap B^+) \bigcup (A^- \bigcap B^-)$ і враховуючи те, що згідно із законом де Моргана множинами хибності тільки що розглянутих операндів еквівалентності є $P^+ \bigcup Q^+$ та $R^+ \bigcap Q^-$, матимемо

$$\left[\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right]^+ =$$
$$= ((P^- \bigcap Q^-) \bigcap (R^- \bigcup Q^+)) \bigcup ((P^+ \bigcup Q^+) \bigcap (R^+ \bigcap Q^-)) =$$
$$= ((P^- R^- \bigcap Q^- R^-) \bigcup \underbrace{(P^- Q^+ \bigcap \underbrace{Q^- Q^+}_{\varnothing}}_{X \bigcap \varnothing \equiv \varnothing})) \bigcup$$
$$\bigcup ((P^+ R^+ \bigcap P^+ Q^-) \bigcup \underbrace{(Q^+ R^+ \bigcap \underbrace{Q^+ Q^-}_{\varnothing}}_{X \bigcap \varnothing \equiv \varnothing})) = P^- R^- Q^- \bigcup P^+ R^+ Q^- =$$
$$= (P^- \cdot R^- \bigcup P^+ \cdot R^+) \bigcap Q^- =$$
$$= \{-5, -3, -2, 0, 1, 3, 4, 6, 7\} \bigcap \{-4, -2, 0, 2, 4, 6\} = \{-2, 0, 4, 6\}.$$

Остаточно, $\left[\overline{S(x)}\right]^+ = U \setminus S^+ = S^- = \{-5..-3, 0, 6, 7\}$ і

$$T^+ = \left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right)\right]^+ \bigcap \left[\overline{S(x)}\right]^+ =$$
$$= ((P^- \bigcap R^-) \bigcup (P^+ \bigcap R^+)) \bigcap Q^- \bigcap S^-.$$

б) Маючи на увазі отримані під час побудови аналітичного виразу для множини T^+ елементи множин $\left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right)\right]^+$ і $\left[\overline{S(x)}\right]^+$, визначимо елементи множини T^+:

$$T^+ = \{-2, 0, 4, 6\} \bigcap \{-5..-3, 0, 6, 7\} = \{0, 6\}.$$

в) Перевіримо отриманий результат за допомогою таблиці істинності предиката $T(x) = \left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}$.

Таблиця 3.1

Предикат	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$P(x)$	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
$Q(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Предикат	–5	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4	5	6	7
$R(x)$	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1
$S(x)$	0	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	0	0
$\overline{P(x) \vee Q(x)}$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0
$\overline{R(x)} \vee Q(x)$	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	1	1
$\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)$	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0
$T(x)$	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0

Отже, область істинності заданого предиката

$$T^{+} = \left[\left(\overline{P(x) \vee Q(x)} \sim \left(\overline{R(x)} \vee Q(x)\right)\right) \wedge \overline{S(x)}\right]^{+} = \{0, 6\}. \qquad \square$$