## Мінімізація ДНФ. Застосування діаграм Карно–Вейча

Одним із способів компактного графоаналітичного подання булевих функцій є діаграми (мінімізаційні карти) Карно–Вейча. На рис. 2.1 показано структуру діаграм Карно–Вейча, що передбачаються для подання ДДНФ функцій двох (***а***), трьох (***б***) і чотирьох (***в***) змінних. Кожній клітині діаграми відповідає певна кон'юнкція змінних або їхніх заперечень; при тому кон’юнкції, розміщені у будь-яких двох сусідніх клітинах, розрізняються тільки одним співмножником. Зауважимо, що, застосовуючи діаграму для функції трьох змінних (рис. 2.1,***б***), її потрібно вважати розгорткою циліндра, розрізаного по стику першого й четвертого стовпців; щодо діаграми, побудованої для функції чотирьох змінних (рис.2.1,***в***), її треба розглядати як розгортку двох циліндрів: вертикального, розрізаного по стику першого й четвертого стовпців, і горизонтального, розрізаного по стику першого й четвертого рядків. Це зауваження дуже важливе при порівнянні співмножників у сусідніх клітинах – клітини, які розташовані по обидва боки від розрізів, також вважаються сусідніми.

| | $x_1$ | $\bar{x}_1$ |
|---|---|---|
| $x_2$ | $x_1x_2$ | $\bar{x}_1x_2$ |
| $\bar{x}_2$ | $x_1\bar{x}_2$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2$ |

***а***

| | $x_1$ | $x_1$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_1$ |
|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $x_1x_2\bar{x}_3$ | $x_1x_2x_3$ | $\bar{x}_1x_2x_3$ | $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$ |
| $\bar{x}_2$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ | $x_1\bar{x}_2x_3$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$ |
| | $\bar{x}_3$ | $x_3$ | $x_3$ | $\bar{x}_3$ |

***б***

| | $x_1$ | $x_1$ | $\bar{x}_1$ | $\bar{x}_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | $x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ | $x_1x_2x_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_4$ |
| $x_2$ | $x_1x_2\bar{x}_3x_4$ | $x_1x_2x_3x_4$ | $\bar{x}_1x_2x_3x_4$ | $\bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4$ | $x_4$ |
| $\bar{x}_2$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ | $x_1\bar{x}_2x_3x_4$ | $\bar{x}_1x_2x_3x_4$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$ | $x_4$ |
| $\bar{x}_2$ | $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ | $x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4$ | $\bar{x}_4$ |
| | $\bar{x}_3$ | $x_3$ | $x_3$ | $\bar{x}_3$ | |

***в***

Рис. 2.1

Діаграму Карно–Вейча для заданої булевої функції заповнюють після побудови ДДНФ цієї функції шляхом запису одиниць у клітинах, які відповідають термам-кон'юнкціям, що входять до ДДНФ. У заповненій таким чином діаграмі об'єднують одиниці, які розташовані в сусідніх клітинах, у прямокутні блоки по 2, 4, 8, 16, … одиниць; при цьому взаємний перетин блоків не виключається, і кожен створений блок повинен об'єднувати максимально можливу кількість одиниць.

Усім можливим наборам значень змінних $x_1, x_2, x_3, x_4$ поставимо у відповідність чотирьохзначне двійкове число (у ньому в кожному розряді змінній відповідатиме 1, а запереченню змінної – 0), або десятковий еквівалент цього числа. Якщо замінити кожний набір змінних на рис.2.1,***в*** вказаними еквівалентами, отримаємо рис.2.2, використання якого значно спрощує заповнення діаграми по заданій ДДНФ досліджуваної функції.

| | $x_1$ | $x_1$ | $\overline{x}_1$ | $\overline{x}_1$ | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 12 | 14 | 6 | 4 | $\overline{x}_4$ |
| $x_2$ | 13 | 15 | 7 | 5 | $x_4$ |
| $\overline{x}_2$ | 9 | 11 | 3 | 1 | $x_4$ |
| $\overline{x}_2$ | 8 | 10 | 2 | 0 | $\overline{x}_4$ |
| | $\overline{x}_3$ | $x_3$ | $x_3$ | $\overline{x}_3$ | |

Рис. 2.2

**2.5.01.** Булеву функцію задано у вигляді наступної формули:

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \wedge x_2 \oplus (x_3 \oplus x_4).$$

Побудувати для цієї функції діаграму Карно–Вейча і скласти для неї мінімальну ДНФ.

<u>Розв'язання.</u> ДДНФ даної функції було створено раніше (див. 2.3.02):

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2x_3\bar{x}_4 +$$
$$= x_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + x_1\bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 \ .$$

Користуючись цією формою, заповнюємо одиницями відповідні клітини діаграми Карно–Вейча (рис. 2.3).

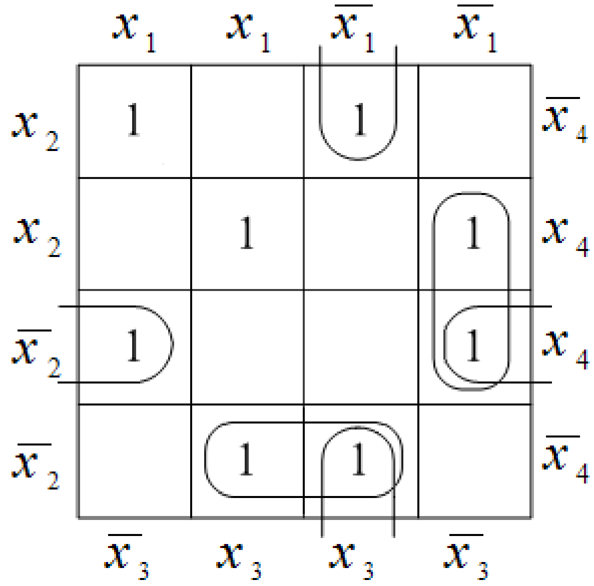

Рис. 2.3

Об'єднуючи сусідні пари одиниць у відповідні блоки, отримуємо чотири 2-клітинних блоки, яким відповідатимуть імпліканти 3-го рангу $\bar{x}_2\bar{x}_3x_4$, $\bar{x}_2x_3\bar{x}_4$, $\bar{x}_1x_3\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1\bar{x}_3x_4$. Звернемо увагу на те, що з цих блоків два є розірваними (діаграма є одночасно розгорткою двох циліндрів – вертикального і горизонтального). Крім зазначених блоків діаграма містить дві ізольовані одиниці, які не входять до жодного блоку – кожна з цих одиниць свідчить про збереження в мінімальній формі відповідних термів-кон'юнкцій ДДНФ. На підставі наведеної діаграми можна записати мінімальну ДНФ, яка відповідатиме заданій функції:

$$F_{\min} = x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3x_4 + \bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_2x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3x_4 \ . \qquad \square$$

**2.5.02.** Булеву функцію чотирьох змінних задано вектором її двійкових значень на всіх 16 наборах значень аргументів: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0111100101110110)$. Скласти для цієї функції мінімальну ДНФ.

Розв'язання. Враховуючи десяткові номери одиничних координат заданого вектора (1, 2, 3, 4, 7, 9, 10, 11, 13, 14) і користуючись рис. 2.2, побудуємо діаграму Карно–Вейча та поєднуємо у відповідні блоки сусідні одиниці (рис. 2.4).

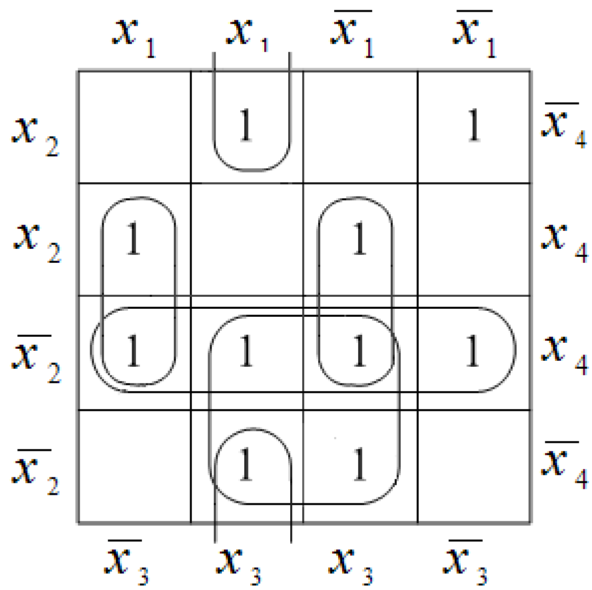

Рис. 2.4

Відповідно до трьох 2-клітинних блоків мінімальна ДНФ міститиме три імпліканти 3-го рангу: $x_1\bar{x}_3x_4$, $x_1x_3\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1x_3x_4$, а відповідно до двох 4-клітинних блоків – дві імпліканти 2-го рангу: $\bar{x}_2x_4$ і $\bar{x}_2x_3$. Оскільки після побудови блоків одна одиниця залишається осторонь цих блоків, терм-кон'юнкція, яка відповідає зазначеній одиниці, увійде в мінімальну форму без змін. Відшукувана ДНФ матиме наступний вигляд:

$$F_{\min} = \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1\bar{x}_3x_4 + x_1x_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_3x_4 + \bar{x}_2x_4 + \bar{x}_2x_3 .$$ □

**2.5.03.** Булеву функцію задано у вигляді формули

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \wedge x_4 \vee x_3) \to (x_1 \oplus x_4) \wedge x_2 .$$

Знайшовши ДДНФ цієї функції, побудувати мінімальну ДНФ.

Розв'язання. ДДНФ даної функції має вигляд (див. 2.3.03):

$$F_{\text{ДДНФ}} = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3x_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + \bar{x}_1x_2\bar{x}_3x_4 +$$
$$+ \bar{x}_1x_2x_3x_4 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_3\bar{x}_4 + x_1x_2x_3\bar{x}_4 .$$

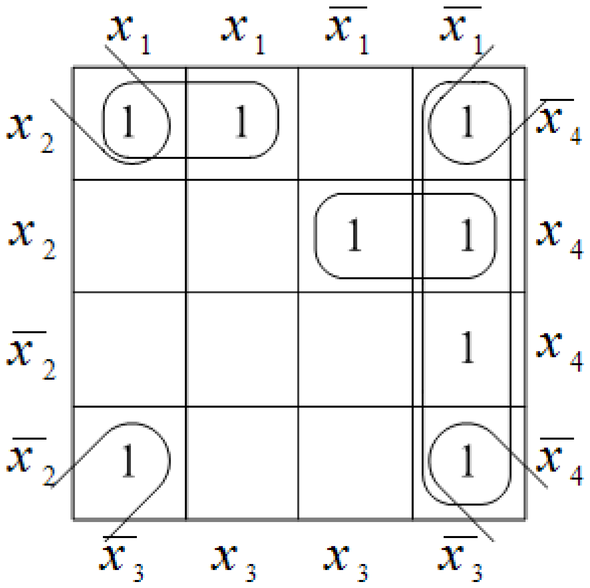

Рис. 2.5

Заповнюючи одиницями клітини діаграми Карно–Вейча (рис. 2.5) і об'єднуючи їх у відповідні блоки, матимемо два 2-клітинних та два 4-клітинних блоки (один з них створено чотирма кутовими одиницями, які повинні вважатися сусідніми у зв'язку з тим, що діаграма є горизонтальною і вертикальною розгорткою циліндра). Зазначеним блокам відповідатимуть дві імпліканти 3-го рангу $x_1x_2\bar{x}_4$ і $\bar{x}_1x_2x_4$ та дві імпліканти 2-го рангу $\bar{x}_1\bar{x}_3$ і $\bar{x}_3\bar{x}_4$. Таким чином, мінімальна ДНФ набуває вигляду

$$F_{\min} = x_1x_2\bar{x}_4 + x_1x_2\bar{x}_4 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_3\bar{x}_4\,. \qquad \square$$

**2.5.04.** Булеву функцію $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ задано вектором її двійкових значень: $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (1110111100011110)$. Скласти для цієї функції мінімальну ДНФ.

Розв'язання. Як і в 2.5.02, для побудови діаграми Карно–Вейча (рис. 2.6) найзручніше врахувати десяткові номери одиничних координат заданого вектора (0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 11, 12, 13, 14) і скористатися рис. 2.2.

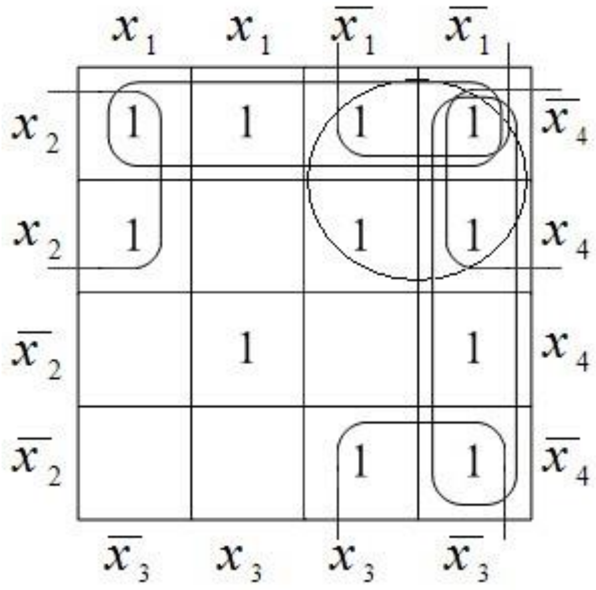


Рис. 2.6

Об'єднання сусідніх одиниць у блоки (маємо п'ять 4-клітинних блоків) породжує п'ять імплікант 2-го рангу $x_2\bar{x}_4$, $x_1x_2$, $\bar{x}_1x_2$, $\bar{x}_1\bar{x}_3$, $\bar{x}_1\bar{x}_4$. Одиниці, що залишилася осторонь усіх блоків, у мінімальній формі відповідатиме терм-кон'юнкція ДДНФ $x_1\bar{x}_2x_3x_4$, який увійде в цю форму без змін. Отже, отримуємо наступну мінімальну ДНФ:

$$F_{\min} = x_1\bar{x}_2x_3x_4 + x_2\bar{x}_4 + x_1x_2 + \bar{x}_1x_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1\bar{x}_4 .$$ □

**2.5.05.** Булеву функцію задано у вигляді формули

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 \to x_2) \vee (x_3 \sim x_4) .$$

Знайшовши ДДНФ цієї функції, побудувати мінімальну ДНФ.

Розв'язання. Для знаходження ДДНФ складемо таблицю істинності даної функції (табл. 2.8).

Діаграма Карно–Вейча має вид, показаний на рис. 2.7. Зауважимо, що крім двох 8-клітинних блоків (відповідні імпліканти 1-го рангу – $\bar{x}_1$ і $x_2$,) та центрального 4-клітинного блоку (відповідна імпліканта 2-го рангу – $x_3x_4$) на діаграмі існує ще 4-клітинний блок, який поєднує 4 кутові одиниці (див. таке ж саме зауваження в 2.5.03) й якому відповідає імпліканта $\bar{x}_3\bar{x}_4$. Таким чином, мінімальна ДНФ набуває наступного вигляду:

$$F_{\min} = x_3 x_4 + \bar{x}_3 \bar{x}_4 + \bar{x}_1 + x_2 .$$

*Таблиця 2.8*

| $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_1 \to x_2$ | $x_3 \sim x_4$ | $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

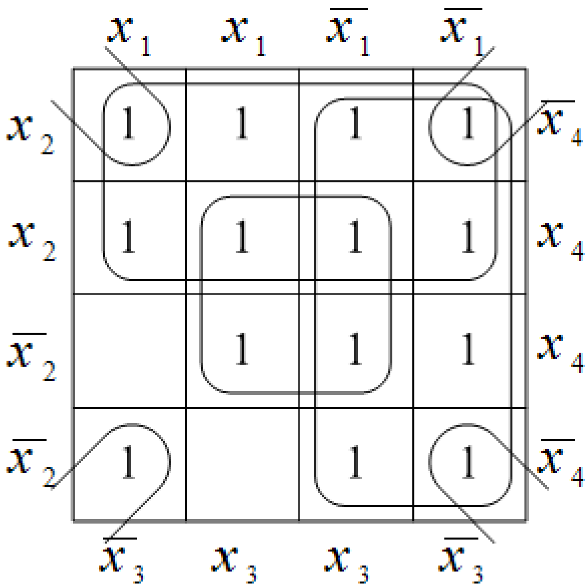


Рис. 2.7