Мінімізація ДНФ

2.5.1. Основні поняття мінімізації

Кожна формула алгебри висловлень, а значить і булева функція, може бути представлена у вигляді ДНФ багатьма способами, і тому постає питання про вибір такого її представлення, яке було б у певному сенсі найпростішим. Але яку формулу вважати найпростішою, за яким принципом здійснювати вибір? Цей вибір здійснюють з урахуванням найменшого значення так званого коефіцієнта (індекса) простоти $L(F)$, який характеризує складність ДНФ. Найчастіше зустрічаються наступні три типи коефіцієнтів простоти:

1) $L'(F)$ – число символів змінних в запису ДНФ (враховується кожне входження змінної);
2) $L''(F)$ – число елементарних кон'юнкцій, що входять у дану ДНФ ;
3) $L'''(F)$ – число символів заперечення в запису ДНФ.

Нехай, наприклад, задано дві еквівалентні формули:

$$F_1 = \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1\bar{x}_2x_3 + x_1x_2\bar{x}_3 + x_1x_2x_3;$$

$$F_2 = F_1 = \bar{x}_2\bar{x}_3 + x_1.$$

Для цих формул маємо наступні значення зазначених коефіцієнтів простоти:

$$L'(F_1) = 15, \quad L''(F_1) = 5, \quad L'''(F_1) = 7;$$
$$L'(F_2) = 3, \quad L''(F_2) = 2, \quad L'''(F_2) = 3.$$

Порівнюючи наведені значення, робимо висновок про те, що за будь-яким типом коефіцієнта простоти формула F_2 є простішою.

Нехай функція $f(x_1, x_2)$ в якому-небудь наборі аргументів (α_1, α_2) функція набуває значення a_1, а функція $\varphi(x_1, x_2)$ в цьому самому наборі – значення a_2 . Тоді говорять, що функція у заданому наборі своїм значенням a_2 *покриває* значення a_1 .

ДДНФ будується так, що кожна одиниця булевої функції покривається одиницею тільки одного терма-кон'юнкції. Тому кількість таких термів, що входять у ДДНФ, дорівнює числу наборів, у яких функція дорівнює 1 .

Ідея побудови скороченої ДНФ полягає в тому, що в неї включаються елементарні кон'юнкції, які покривають своїми одиницями не одну, а декілька одиниць заданої функції.

Наприклад, ДДНФ функції $f_{13} = x_1 \to x_2$ має вигляд

$$f_{13(\text{ДДНФ})} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 . \quad (9.1)$$

Кожна з кон'юнкцій $\bar{x}_1\bar{x}_2$, $\bar{x}_1 x_2$, $x_1 x_2$ покриває тільки одну з трьох одиниць цієї функції. Проте, якщо взяти за елементарний доданок диз'юнкції $\bar{x}_1$, він покриватиме одиницями дві одиниці функції у двох наборах: (0,1) та (0,0), а елементарний доданок x_2 – так само у двох наборах: (0,1) та (1,1). Отже, $\bar{x}_1$ та x_2 спільно покривають одиницями всі одиниці функції f_{13} , яка, таким чином, може бути подана у вигляді ДНФ, значно простішій ніж ДДНФ (див. рис. 9.1):

$$f_{13} = \bar{x}_1 + x_2 .$$

Булеву функцію φ називають *імплікантою* функції f, якщо вираз $\varphi \to f$ є тавтологією. Зауважимо наступне: якщо функція φ – імпліканта, вона покриває нулями всі нулі функції f (звідси випливає, що функція φ має не меншу кількість нулів, ніж функція f), а одиниці функції f можуть бути покриті як нулями, так і одиницями функції φ. Про імпліканту φ говорять, що вона входить у функцію f .

Імплікантам притаманні такі властивості:

1) Якщо $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – імпліканти функції f, те диз'юнкція $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$ також буде імплікантою цієї функції.
2) Якщо $\varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$ – імпліканта функції f, те $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ – також імпліканти цієї функції.

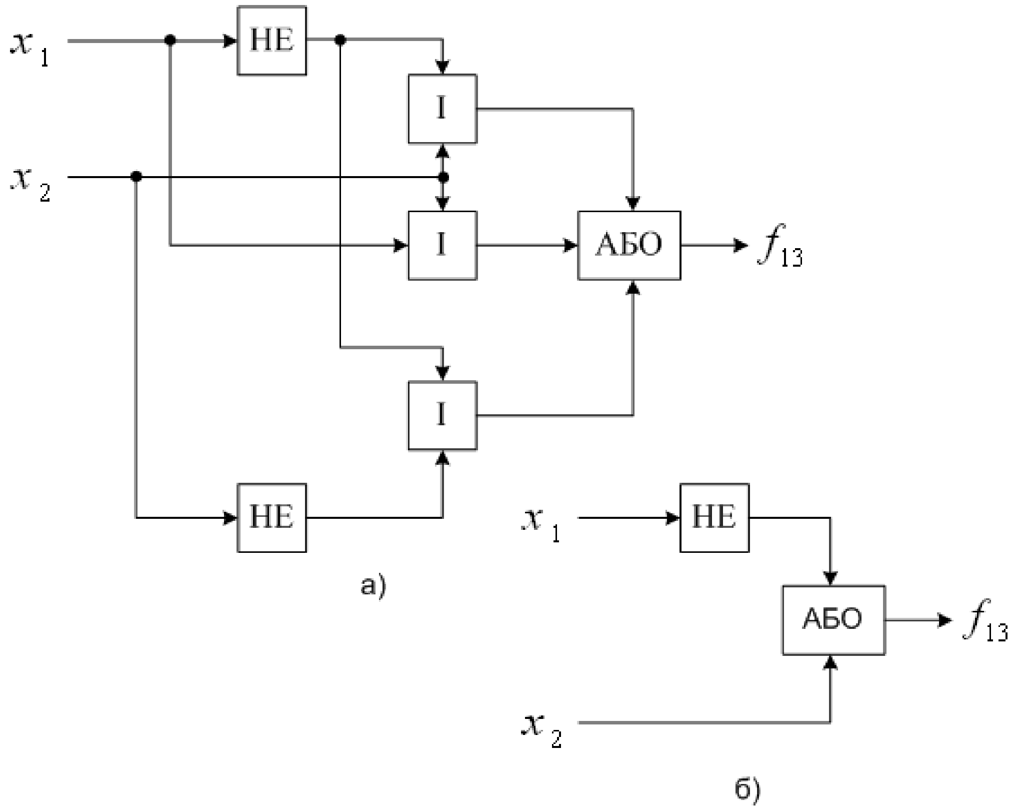

Рис. 9.1

3) Якщо імпліканти $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ в сукупності покривають всі одиниці функції *f*, те $f \equiv \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$.
4) Якщо деяку функцію *f* подано у вигляді диз'юнктивної нормальної форми $g_1 + g_2 + \ldots + g_n$, те $g_1, g_2, \ldots, g_n$ – імпліканти функції *f* .

Власною частиною імпліканти називають кон'юнкцію, здобуту вилученням із неї одного або кількох множників. Наприклад, імпліканта $\bar{x}yz$ має власні частини $\bar{x}y,\ yz,\ \bar{x}z,\ \bar{x},\ y,\ z$.

Простою імплікантою булевої функції f називається елементарна кон'юнкція, що сама входить у задану функцію, але жодна її власна частина у цю функцію не входить.

Наприклад, для функції

$$f(x, y, z) = \bar{x}yz + \bar{x}\bar{y}z + \bar{x}y\bar{z} + xyz + \bar{x}y$$

кон'юнкції $\bar{x}\bar{y}z$ і xyz є простими імплікантами, а $\bar{x}yz$ і $\bar{x}y\bar{z}$ не є ними, оскільки їхня власна частина $\bar{x}y$ входить у задану функцію.

Диз'юнкція всіх можливих простих імплікант називається скороченою ДНФ булевої функції.

ДНФ (в тому числі скорочена) може містити "зайві" імпліканти (тобто такі, вилучення яких є еквівалентне перетворення й не змінює логічного значення формули).

Скорочена ДНФ, з якої не можна вилучити жодної імпліканти, називається тупиковою. Саме серед тупикових ДНФ є обов'язково відшукувана мінімальна форма.

Таким чином, загальна схема мінімізації ДНФ передбачає наступні дії:

1) отримання ДДНФ заданої логічної функції;
2) виділення з ДДНФ скороченої ДНФ цієї функції;
3) знаходження всіх тупикових ДНФ заданої функції;
4) вибір серед тупикових ДНФ мінімальної форми з урахуванням прийнятого коефіцієнта простоти.

Перехід від ДДНФ до скороченої ДНФ є найбільш складним пунктом зазначеного алгоритму. Саме способом реалізації цього пункту відрізняються методи мінімізації ДНФ, що існують і що наведені нижче.

Вказаний перехід здійснюється за допомогою операцій повного та неповного склеювання й поглинання. В операції повного склеювання

$$xy + \bar{x}y = (x + \bar{x})y = y$$

доданки xy і $\bar{x}y$ склеюються за змінною y. На відміну від цього в операції неповного склеювання, приймаючи до уваги закон поглинання ($y = y + xy$, або $y = y + \bar{x}y$), матимемо

$$xy + \bar{x}y = y + xy, \text{ або } xy + \bar{x}y = y + \bar{x}y.$$

Наприклад, ДДНФ функції $f_{13} = x_1 \to x_2$, яку представлено формулою (9.1), перетворюється у скорочену ДНФ наступним чином:

$$f_{13} = \bar{x}_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = \bar{x}_1(\bar{x}_2 + x_2) + x_1 x_2 = \bar{x}_1 + x_1 x_2 =$$
$$= \bar{x}_1 + \bar{x}_1 x_2 + x_1 x_2 = \bar{x}_1 + (\bar{x}_1 + x_1)x_2 = \bar{x}_1 + x_2 .$$

Метод Блейка–Порецького

Метод Блейка–Порецького дає можливість побудови скороченої ДНФ не за ДДНФ, а за довільною ДНФ даної функції. Основою цього методу за наявністю в даній ДНФ двох кон'юнкцій Ax_i і $B\bar{x}_i$ служить формула

$$Ax_i + B\bar{x}_i = Ax_i + B\bar{x}_i + AB,$$

яку називають формулою *узагальненого склеювання*. Доповнення ДНФ відповідно до наведеної формули після застосування можливих поглинань приводить до скороченої ДНФ. Після побудови скороченої ДНФ, застосувавши імплікантну матрицю (її в цьому випадку створюють у припущенні, що ДДНФ розглядуваної функції містить усі 2^n термів), можна визначити потрібну мінімальну ДНФ.

2.7.01. Застосувавши метод Блейка–Порецького, знайти скорочену та мінімальну ДНФ для функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3$.

<u>Розв'язання.</u> Формула узагальненого склеювання, застосована до першої й другої елементарних кон'юнкцій, дає додаткову кон'юнкцію x_1x_3. Після цього задана функція з урахуванням закону поглинання набуває вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\underline{x_1x_2x_3} + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \underline{x_1x_3}}_{x \cdot y + x \equiv x} = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3.$$

Повторне застосування зазначеної формули до першого і другого доданків отриманого виразу дасть ще одну кон'юнкцію $\bar{x}_2\bar{x}_3$, що дозволяє записати дану функцію у вигляді скороченої ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Створюємо імплікантну матрицю:

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$
$x_1\bar{x}_2$					*	*		
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	*		*					
x_1x_3						*		*
$\bar{x}_2\bar{x}_3$	*				*			

Аналізуючи цю матрицю та ігноруючи стовпці матриці, які не мають міток, відмічаємо наявність двох суттєвих імплікант $\bar{x}_1\bar{x}_3$ і x_1x_3. Покриття терму $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, що залишився непокритим, може бути здійсненим двома імплікантами: або $x_1\bar{x}_2$, або $\bar{x}_2\bar{x}_3$. Таким чином, маємо дві тупикові ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + x_1\bar{x}_2,$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3,$$

з яких (за умови урахування додаткової вимоги мінімальної кількості заперечень) мінімальною ДНФ буде перша з двох зазначених тупикових:

$$f_{\min} = \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + x_1\bar{x}_2. \qquad \square$$

2.7.02. Застосувавши метод Блейка–Порецького, знайти мінімальну ДНФ для функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2$.

Розв'язання. Застосовуючи формулу узагальненого склеювання до першого і другого доданків даної функції, отримуємо додаткову кон'юнкцію x_1x_2, а застосовуючи цю формулу до першого і третього доданків, – кон'юнкцію x_2x_3. Тоді дана функція з урахуванням законів поглинання й виключеного третього набуває вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\underline{x_1x_2x_3} + x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2 + \underline{x_1x_2}}_{x\cdot y + x \equiv x} + x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 + \bar{x}_1x_2 + x_1x_2 + x_2x_3 =$$

$$= x_1\bar{x}_3 + \underbrace{(\bar{x}_1 + x_1)}_{\bar{x}+x\equiv 1}x_2 + x_2x_3 = x_1\bar{x}_3 + \underbrace{x_2 + x_2x_3}_{x + x\cdot y \equiv x} = x_1\bar{x}_3 + x_2.$$

Очевидно, що знайдена ДНФ для даної функції є єдиною тупиковою формою, а значить, і мінімальною: $f_{\min} = x_2 + x_1\bar{x}_3$.