

## Поліноми Жегалкіна. Метод невизначених коефіцієнтів.

Поліном Жегалкіна може бути створений за методом невизначених коефіцієнтів. Основою застосування цього способу є загальний вид полінома; для функції двох змінних це

$$f(x_1, x_2) = A_0 \oplus A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \oplus A_3 x_1 x_2,$$

для функції трьох змінних –

$$f(x_1, x_2, x_3) = A_0 \oplus A_1 x_1 \oplus A_2 x_2 \oplus A_3 x_3 \oplus A_4 x_1 x_2 \oplus A_5 x_1 x_3 \oplus A_6 x_2 x_3 \oplus A_7 x_1 x_2 x_3$$

і т.д. Щоб знайти значення коефіцієнтів  $A_0, A_1, A_2, \dots$ , для даної функції заповнюється таблиця істинності, яка дозволяє скласти відповідну кількість рівнянь (чотири для функції двох змінних, вісім – для функції трьох змінних і т.д.), що містять зазначені коефіцієнти як невідомі величини. Розв'язуючи систему цих рівнянь, визначаємо коефіцієнти (їхні можливі значення – 0 і 1) та записуємо поліном.

**2.4.01.** Функцію  $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(\bar{x}_2 + x_1 x_3)$  подати у вигляді полінома Жегалкіна.

### Розв'язання.

Складемо таблицю істинності наданої функції (табл. 2.7). Після цього, послідовно підставивши кожен набір значень аргументів  $x_1, x_2, x_3$  і відповідне значення функції  $f(x_1, x_2, x_3)$  у загальний вираз полінома, дістанемо систему 8 рівнянь

Таблиця 2.7

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\bar{x}_2$	$x_1 + x_2$	$x_1 x_3$	$\bar{x}_2 + x_1 x_3$	$f$
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	1	0	0	1	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	1	0	0	1	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	0	1	0	0	<b>0</b>
<b>0</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	0	1	0	0	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>0</b>	1	1	0	1	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>0</b>	<b>1</b>	1	1	1	1	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>0</b>	0	1	0	0	<b>0</b>
<b>1</b>	<b>1</b>	<b>1</b>	0	1	1	1	<b>1</b>

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 0 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 0 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 0 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 0 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 0 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 0 \oplus A_6 \cdot 0 \oplus A_7 \cdot 0; \\ 1 = A_0 \oplus A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 1. \end{array} \right.$$

Рівняння цієї системи розв'язуємо послідовно, починаючи з першого:

$$A_0 = 0;$$

$$A_3 \cdot 1 = 0; \quad A_3 = 0;$$

$$A_2 \cdot 1 = 0; \quad A_2 = 0;$$

$$A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 = 0; \quad A_6 \cdot 1 = 0; \quad A_6 = 0;$$

$$A_1 \cdot 1 = 1; \quad A_1 = 1;$$

$$A_1 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 = 1; \quad 1 \oplus A_5 \cdot 1 = 1; \quad A_5 = 0;$$

$$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0; \quad 1 \oplus A_4 \cdot 1 = 0; \quad A_4 = 1;$$

$$A_1 \cdot 1 \oplus A_2 \cdot 1 \oplus A_3 \cdot 1 \oplus A_4 \cdot 1 \oplus A_5 \cdot 1 \oplus A_6 \cdot 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1; \quad 1 \oplus 1 \oplus A_7 \cdot 1 = 1; \\ A_7 = 1.$$

Після підстановки значень знайдених коефіцієнтів у загальний вираз полінома, набуваємо його наступний вигляд:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \oplus x_1 x_2 \oplus x_1 x_2 x_3$$

(порівн. з результатом застосування 1-го способу розв'язку). □

**Індивідуальні завдання.** У задачах 01 – 30 задану булеву функцію  $f(x_1, x_2, x_3)$  подати у вигляді полінома Жегалкіна, використовуючи при цьому метод невизначених коефіцієнтів.

$$1. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \rightarrow x_3) \vee x_2) | (\bar{x}_1 \sim x_2 \wedge x_3).$$

$$2. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3 \rightarrow ((x_1 \sim x_3) \vee x_2).$$

$$3. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_2 \wedge x_3) \wedge ((x_1 \sim \bar{x}_3) \vee x_2).$$

$$4. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge x_3 \rightarrow ((x_1 \vee x_2) \downarrow x_3).$$

$$5. f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \rightarrow (x_3 \sim (x_2 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3)).$$

$$6. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee x_2) \wedge x_3 \leftarrow ((x_1 \downarrow x_2) | \bar{x}_3).$$

$$7. f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3 \rightarrow (x_2 | (x_3 \vee \bar{x}_1 \wedge x_2)).$$

$$8. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 | x_3) \rightarrow ((\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_3).$$

$$9. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3 \rightarrow x_2) | (x_1 \leftarrow (\bar{x}_2 \vee x_3)).$$

$$10. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3) | (x_3 \downarrow x_1 \wedge x_2).$$

$$11. f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \sim ((\bar{x}_1 | x_2 \wedge x_3) \rightarrow \bar{x}_3).$$

$$12. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_3) \leftarrow x_2) | (x_1 \sim \bar{x}_2 \wedge x_3).$$

$$13. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3) \downarrow x_2) \leftarrow \bar{x}_3.$$

$$14. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_3) \vee x_2) \rightarrow (x_1 \downarrow x_2) \wedge \bar{x}_3.$$

$$15. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 | \bar{x}_2) \sim x_3) \vee (x_1 \leftarrow x_3) \wedge x_2.$$

$$16. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3 \sim x_2) | ((x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \vee x_3).$$

$$17. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim x_2) \vee x_3 \rightarrow x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3).$$

$$18. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 | x_3) \wedge ((\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_3).$$

$$19. f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \downarrow (x_2 \vee x_3)).$$

$$20. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (\bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3)) \leftarrow \bar{x}_2.$$

$$21. f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \leftarrow (\bar{x}_1 | (x_2 \downarrow x_3)).$$

$$22. f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \rightarrow (x_3 \downarrow (x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3)).$$

$$23. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 | x_2 \wedge x_3) \rightarrow (x_1 \vee (\bar{x}_2 \sim x_3)).$$

$$24. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3) | ((x_1 \vee \bar{x}_3) \rightarrow x_2).$$

$$25. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_3 \vee x_2) \rightarrow (x_1 \downarrow x_2 \wedge x_3).$$

$$26. f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sim (\bar{x}_1 \leftarrow (\bar{x}_2 | x_1 \wedge x_3)).$$

$$27. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \leftarrow x_3) | (x_1 \wedge \bar{x}_3 \sim x_2).$$

$$28. f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \rightarrow ((x_2 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3) \downarrow x_3).$$

$$29. f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_2) \vee x_3) \rightarrow \bar{x}_1 \wedge (x_2 \downarrow x_3).$$

$$30. f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (x_2 | \bar{x}_3)) \vee (x_1 \rightarrow x_2) \wedge x_3.$$