## Поліноми Жегалкіна (побудова з використанням тотожних перетворень)

Система функцій, яка побудована на базі операцій ($\wedge, \oplus$), є ще одним прикладом функціонально повної системи. Алгебра $(B, \wedge, \oplus, 0, 1)$, утворена множиною-носієм $B = \{0, 1\}$, бінарними операціями $\wedge$ і $\oplus$ та константами 0,1, називається алгеброю Жегалкіна. Вказаним операціям притаманні наступні властивості:

$$x \oplus y = y \oplus x; \quad x(y \oplus z) = xy \oplus xz; \quad x \oplus x = 0; \quad x \oplus 0 = x.$$

Крім того, матимемо на увазі формули, що виражають заперечення й диз'юнкцію за допомогою операцій $\wedge$ і $\oplus$:

$$\bar{x} = x \oplus 1; \quad x + y = xy \oplus x \oplus y.$$

Якщо у довільній формулі алгебри Жегалкіна, яка представляє певну логічну функцію, розкрити дужки та здійснити всі можливі спрощення, одержана таким чином формула матиме вигляд суми за модулем 2 добутків, тобто полінома за модулем 2. Цей поліном називається поліномом Жегалкіна даної функції. Для його побудови здійснюються тотожні перетворення заданої булевої функції, в якій, насамперед, роблять заміну диз'юнкцій і заперечень із застосуванням операцій алгебри Жегалкіна, після чого отриманий вираз спрощують з урахуванням властивостей цих операцій і загальних законів булевої алгебри.

**2.4.01.** Функцію $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2)(\bar{x}_2 + x_1 x_3)$ подати у вигляді полінома Жегалкіна.

<u>Розв'язання.</u> Розкриваючи в даній функції дужки й враховуючи закони алгебри логіки, властивості операцій алгебри Жегалкіна та формули, які через ці операції виражають заперечення й диз'юнкцію, матимемо:

$$\underbrace{(x_1+x_2)(\bar{x}_2+x_1x_3)}_{\text{дистрибутивний закон}} = \underbrace{x_1\bar{x}_2+x_1x_1x_3+x_2\bar{x}_2}_{x+x\equiv x}+x_1x_2x_3 = \underbrace{x_1\bar{x}_2+x_1x_3}_{x+y\equiv xy\oplus x\oplus y}+x_1x_2x_3 =$$

$$= \underbrace{(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)+x_1x_2x_3}_{x+y\equiv xy\oplus x\oplus y} =$$

$$= (x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)x_1x_2x_3\oplus(x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2\oplus x_1x_3)\oplus x_1x_2x_3 =$$

$$= x_1x_2x_3\oplus \underbrace{x_1\bar{x}_2x_3\oplus x_1\bar{x}_2}_{\bar{x}\equiv x\oplus 1}\oplus x_1x_3\oplus x_1x_2x_3 =$$

$$= \underbrace{x_1(x_2\oplus 1)x_3}_{x(y\oplus z)\equiv xy\oplus xz}\oplus \underbrace{x_1(x_2\oplus 1)\oplus x_1x_3}_{x(y\oplus z)\equiv xy\oplus xz} = x_1x_2x_3\oplus \underbrace{x_1x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\oplus x_1x_3}_{x\oplus x\equiv 0} =$$

$$= x_1x_2x_3\oplus x_1x_2\oplus x_1\ .$$

Отже, поліном Жегалкіна для даної функції має вигляд

$$f(x_1,x_2,x_3)=x_1\oplus x_1x_2\oplus x_1x_2x_3.$$

***<u>Індивідуальні завдання</u>***. У задачах 01 – 30 задану булеву функцію $f(x_1,x_2,x_3)$ подати у вигляді полінома Жегалкіна, використовуючи при цьому необхідні тотожні перетворення (заміну диз'юнкцій і заперечень відповідно до зазначених вище формул та застосування законів булевої алгебри).

1. $f(x_1,x_2,x_3)=((x_1\to x_3)\vee x_2)\,|\,(\bar{x}_1\sim x_2\wedge x_3)$.
2. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee \bar{x}_2)\wedge x_3\to((x_1\sim x_3)\vee x_2)$.
3. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\,|\,x_2\wedge x_3)\wedge((x_1\sim \bar{x}_3)\vee x_2)$.
4. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee \bar{x}_2)\wedge x_3\to((x_1\vee x_2)\downarrow x_3)$.
5. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\to(x_3\sim(x_2\vee x_1\wedge \bar{x}_3))$.
6. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee x_2)\wedge x_3\leftarrow((x_1\downarrow x_2)\,|\,\bar{x}_3)$.
7. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3\to(x_2\,|\,(x_3\vee \bar{x}_1\wedge x_2))$.
8. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_2\,|\,x_3)\to((\bar{x}_1\sim x_2)\vee x_3)$.
9. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\wedge x_3\to x_2)\,|\,(x_1\leftarrow(\bar{x}_2\vee x_3))$.
10. $f(x_1,x_2,x_3)=(x_1\vee \bar{x}_2\wedge x_3)\,|\,(x_3\downarrow x_1\wedge x_2)$.
11. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\sim((\bar{x}_1\,|\,x_2\wedge x_3)\to \bar{x}_3)$.
12. $f(x_1,x_2,x_3)=((x_1\vee x_3)\leftarrow x_2)\,|\,(x_1\sim \bar{x}_2\wedge x_3)$.
13. $f(x_1,x_2,x_3)=((x_1\vee \bar{x}_2\wedge x_3)\downarrow x_2)\leftarrow \bar{x}_3$.

14. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_3) \vee x_2) \rightarrow (x_1 \downarrow x_2) \wedge \bar{x}_3$.

15. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \mid \bar{x}_2) \sim x_3) \vee (x_1 \leftarrow x_3) \wedge x_2$.

16. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_3 \sim x_2) \mid ((x_1 \leftarrow \bar{x}_2) \vee x_3)$.

17. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim x_2) \vee x_3) \rightarrow x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3)$.

18. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \mid x_3) \wedge ((\bar{x}_1 \sim x_2) \vee x_3)$.

19. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee \bar{x}_3) \rightarrow (x_1 \downarrow (x_2 \vee x_3))$.

20. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (\bar{x}_1 \wedge x_2 \vee x_3)) \leftarrow \bar{x}_2$.

21. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1 \wedge (x_2 \vee x_3) \leftarrow (\bar{x}_1 \mid (x_2 \downarrow x_3))$.

22. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \rightarrow (x_3 \downarrow (x_1 \vee \bar{x}_2 \wedge x_3))$.

23. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \mid x_2 \wedge x_3) \rightarrow (x_1 \vee (\bar{x}_2 \sim x_3)$.

24. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge x_2 \rightarrow x_3) \mid ((x_1 \vee \bar{x}_3) \rightarrow x_2)$.

25. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \wedge \bar{x}_3 \vee x_2) \rightarrow (x_1 \downarrow x_2 \wedge x_3)$.

26. $f(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sim (\bar{x}_1 \leftarrow (\bar{x}_2 \mid x_1 \wedge x_3))$.

27. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \vee x_2) \leftarrow x_3) \mid (x_1 \wedge \bar{x}_3 \sim x_2)$.

28. $f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_1 \rightarrow ((x_2 \vee x_1 \wedge \bar{x}_3) \downarrow x_3)$.

29. $f(x_1, x_2, x_3) = ((x_1 \sim x_2) \vee x_3) \rightarrow \bar{x}_1 \wedge (x_2 \downarrow x_3)$.

30. $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \sim (x_2 \mid \bar{x}_3)) \vee (x_1 \rightarrow x_2) \wedge x_3$.