Лр №2. Мінімізація ДНФ – метод Блейка–Порецького

Метод Блейка–Порецького дає можливість побудови скороченої ДНФ не за ДДНФ, а за довільною ДНФ даної функції. Основою цього методу за наявністю в даній ДНФ двох кон'юнкцій Ax_i і $B\bar{x}_i$ служить формула

$$Ax_i + B\bar{x}_i = Ax_i + B\bar{x}_i + AB,$$

яку називають формулою *узагальненого склеювання*. Доповнення ДНФ відповідно до наведеної формули після застосування можливих поглинань приводить до скороченої ДНФ. Після побудови скороченої ДНФ, застосувавши імплікантну матрицю (її в цьому випадку створюють у припущенні, що ДДНФ розглядуваної функції містить усі 2^n термів), можна визначити потрібну мінімальну ДНФ.

2.7.01. Застосувавши метод Блейка–Порецького, знайти скорочену та мінімальну ДНФ для функції $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3$.

Розв'язання. Формула узагальненого склеювання, застосована до першої й другої елементарних кон'юнкцій, дає додаткову кон'юнкцію x_1x_3. Після цього задана функція з урахуванням закону поглинання набуває вигляду

$$f(x_1, x_2, x_3) = \underbrace{\underline{x_1x_2x_3} + x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + \underline{x_1x_3}}_{x\cdot y + x \equiv x} = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3.$$

Повторне застосування зазначеної формули до першого і другого доданків отриманого виразу дасть ще одну кон'юнкцію $\bar{x}_2\bar{x}_3$, що дозволяє записати дану функцію у вигляді скороченої ДНФ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1\bar{x}_2 + \bar{x}_1\bar{x}_3 + x_1x_3 + \bar{x}_2\bar{x}_3.$$

Створюємо імплікантну матрицю (табл. 2.11).

Таблиця 2.11

	$\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1\bar{x}_2x_3$	$\bar{x}_1x_2\bar{x}_3$	$\bar{x}_1x_2x_3$	$x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$	$x_1\bar{x}_2x_3$	$x_1x_2\bar{x}_3$	$x_1x_2x_3$
$x_1\bar{x}_2$					*	*		
$\bar{x}_1\bar{x}_3$	*		*					
x_1x_3						*		*
$\bar{x}_2\bar{x}_3$	*				*			

Аналізуючи цю матрицю та ігноруючи стовпці матриці, які не мають міток, відмічаємо наявність двох суттєвих імплікант $\bar{x}_1\bar{x}_3$ і x_1x_3. Покриття терму $x_1\bar{x}_2\bar{x}_3$, що залишився непокритим, може бути здійсненим двома імплікантами: або $x_1\bar{x}_2$, або $\bar{x}_2\bar{x}_3$. Таким чином, маємо дві тупикові ДНФ:

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_3+x_1x_3+x_1\bar{x}_2\,,$$

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_3+x_1x_3+\bar{x}_2\bar{x}_3\,,$$

з яких (за умови урахування додаткової вимоги мінімальної кількості заперечень) мінімальною ДНФ буде перша з двох зазначених тупикових:

$$f_{\min}=\bar{x}_1\bar{x}_3+x_1x_3+x_1\bar{x}_2\,. \qquad \square$$

2.7.02. Застосувавши метод Блейка–Порецького, знайти мінімальну ДНФ для функції $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2$.

<u>Розв'язання.</u> Застосовуючи формулу узагальненого склеювання до першого і другого доданків даної функції, отримуємо додаткову кон'юнкцію x_1x_2, а застосовуючи цю формулу до першого і третього доданків, – кон'юнкцію x_2x_3. Тоді дана функція з урахуванням законів поглинання й виключеного третього набуває вигляду

$$f(x_1,x_2,x_3)=\underbrace{\underline{x_1x_2x_3}+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+\underline{x_1x_2}}_{x\cdot y+x\equiv x}+x_2x_3=x_1\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+x_1x_2+x_2x_3=$$

$$=x_1\bar{x}_3+\underbrace{(\bar{x}_1+x_1)}_{\bar{x}+x\equiv 1}x_2+x_2x_3=x_1\bar{x}_3+\underbrace{x_2+x_2x_3}_{x+x\cdot y\equiv x}=x_1\bar{x}_3+x_2\,.$$

Очевидно, що знайдена ДНФ для даної функції є єдиною тупиковою формою, а значить, і мінімальною:

$$f_{\min}=x_2+x_1\bar{x}_3\,. \qquad \square$$

У задачах 2.7.01 – 2.7.25 задану булеву функцію $f(x_1, x_2, x_3)$ записати у вигляді скороченої ДНФ, користуючись методом Блейка–Порецького. Визначити мінімальну ДНФ (при наявності двох тупикових форм враховувати вимогу мінімального числа заперечень).

2.7.01. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_2x_3+x_1\bar{x}_2$.

2.7.02. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_3$.

2.7.03. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2x_3+x_1x_2+\bar{x}_2x_3$.

2.7.04. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_3+\bar{x}_1\bar{x}_2$.

2.7.05. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2+x_1\bar{x}_3$.

2.7.06. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_1x_3+x_2\bar{x}_3$.

2.7.07. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+\bar{x}_2x_3$.

2.7.08. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+x_1x_3$.

2.7.09. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+x_2x_3+x_1\bar{x}_3$.

2.7.10. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3+x_2x_3$.

2.7.11. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2\bar{x}_3+x_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_2$.

2.7.12. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+x_1x_3$.

2.7.13. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3$.

2.7.14. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_2+\bar{x}_1x_3$.

2.7.15. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1\bar{x}_2$.

2.7.16. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2x_3+x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_3$.

2.7.17. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3+x_2\bar{x}_3$.

2.7.18. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1x_3+\bar{x}_1x_2$.

2.7.19. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2\bar{x}_3+\bar{x}_1x_2+\bar{x}_2\bar{x}_3$.

2.7.20. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2$.

2.7.21. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_2+x_2x_3$.

2.7.22. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_2x_3+\bar{x}_1\bar{x}_3$.

2.7.23. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3+x_1\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3$.

2.7.24. $f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_1x_2x_3+x_1x_2+\bar{x}_1\bar{x}_3$.

2.7.25. $f(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{x}_2\bar{x}_3+\bar{x}_2x_3+\bar{x}_1x_2$.