



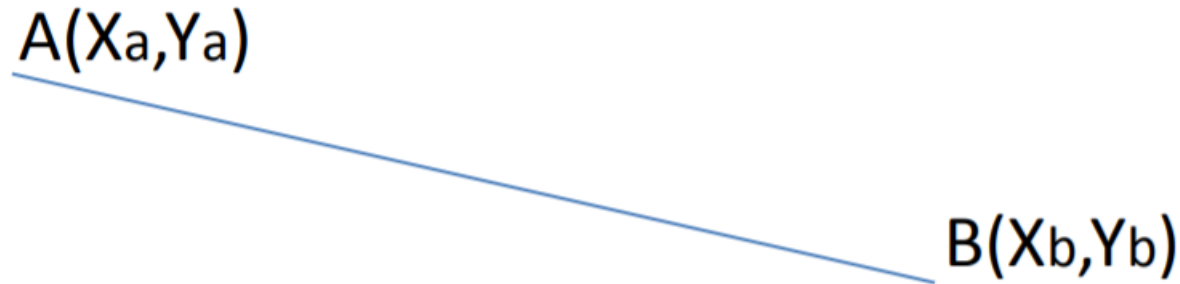
НАЦІОНАЛЬНИЙ  
УНІВЕРСИТЕТ  
КОРАБЛЕБУДУВАННЯ  
ІМЕНІ АДМІРАЛА МАКАРОВА

# Вычислительная геометрия

Беркунский Е.Ю., кафедра ИУСТ, НУК  
eugeny.berkunsky@gmail.com  
<http://www.berkut.mk.ua>

# Расстояние между точками

- Даны две точки на плоскости. Найти расстояние между ними:



$$r = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

$$r = \text{hypot}(x_a - x_b, y_a - y_b)$$

# Принадлежность точки прямоугольнику

P1(X,Y)



P2(X,Y)

P2(X,Y)

P1(X,Y)

```
boolean pointInBox (Point t, Point p1, Point p2) {  
    return  
    (abs (t.x - min(p1.x, p2.x)) <= eps || min(p1.x, p2.x) <= t.x) &&  
    (abs (max(p1.x, p2.x) - t.x) <= eps || max(p1.x, p2.x) >= t.x) &&  
    (abs (t.y - min(p1.y, p2.y)) <= eps || min(p1.y, p2.y) <= t.y) &&  
    (abs (max(p1.y, p2.y) - t.y) <= eps || max(p1.y, p2.y) >= t.y);  
}
```

*Примечание. Нужно учитывать особенности арифметики с плавающей точкой.*

# Взаимное расположение точек

- Даны две точки.

Определить «самую левую», «самую правую», «самую верхнюю», «самую нижнюю»

// наиболее левая из двух точек

```
Point min_px (Point a, Point b) {  
    return a.x < b.x || (abs(a.x - b.x) <= eps && a.y < b.y) ? a : b;  
}
```

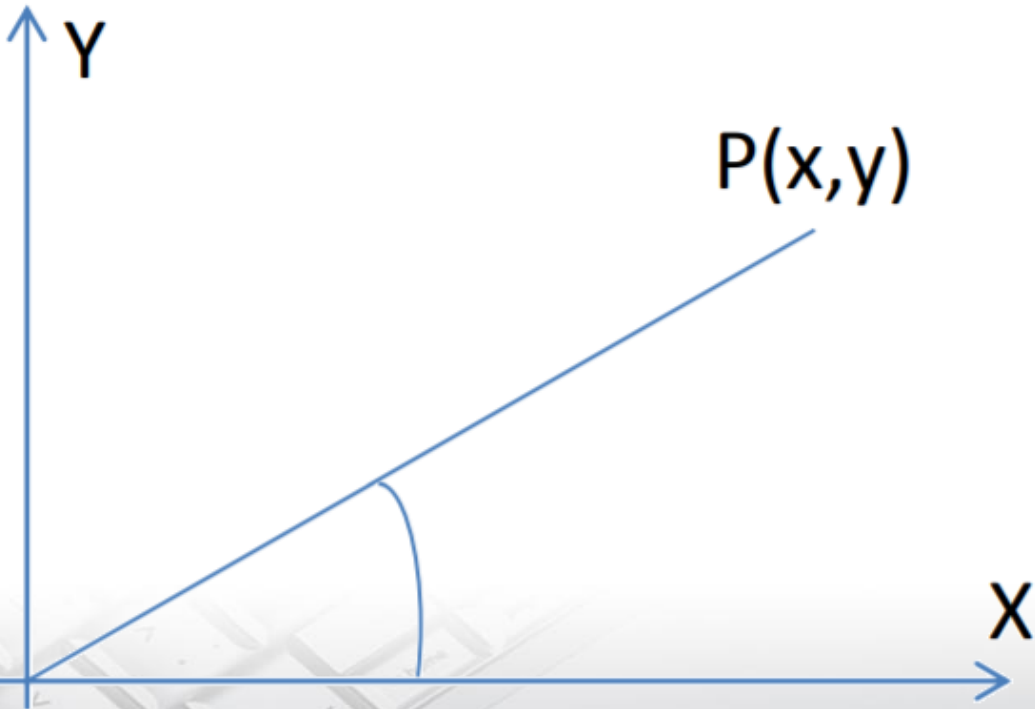
// наиболее правая из двух точек

```
Point max_px (Point a, Point b) {  
    return a.x > b.x || (abs(a.x - b.x) <= eps && a.y > b.y) ? a : b;  
}
```

# Полярный угол точки

- Дана точка

Необходимо вычислить угол между точкой и осью OX



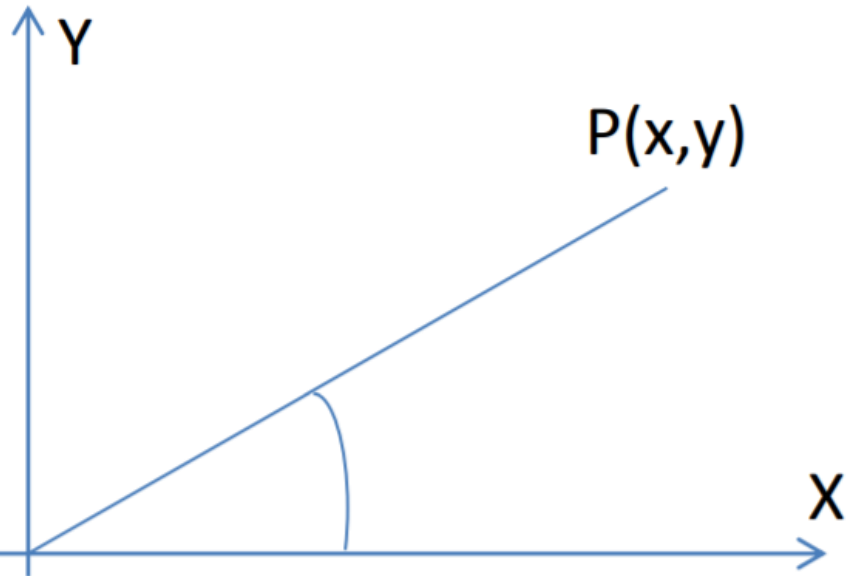
Для вычисления используем формулу:  
 $\alpha = \arctg (y / x)$

Необходимо рассматривать отдельно  
случай когда  $x = 0$

# Полярный угол точки

- Дана точка

Необходимо вычислить угол между точкой и осью OX



можно воспользоваться функцией `atan2`, которая вычисляет угол в диапазоне  $(-\pi; \pi]$ .

А если нужен угол в диапазоне  $[0; 2 * \pi)$  ?

```
double polar_angle (Point p) {  
    double alpha = atan2(p.y, p.x);  
    if (alpha < 0) alpha += pi;  
    return alpha;  
}
```

# Полярное расстояние

- Необходимо найти расстояние между двумя точками в полярной системе координат

Переводим точки из полярной системы координат в декартову и вычисляем расстояние.

Используем формулы:

$$x = r * \cos (\alpha)$$

$$y = r * \sin (\alpha)$$

# Деление отрезка в заданном соотношении

- Даны координаты концов отрезка и два числа  $m$  и  $n$ . Необходимо разделить отрезок на две части в отношении длин  $m:n$  и найти точку раздела.



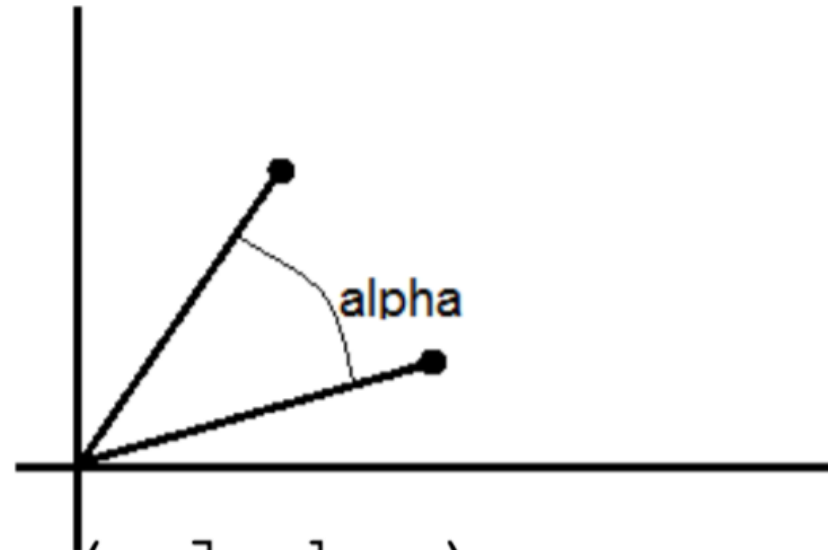
$$x_0 = (x_1 * n + x_2 * m) / (m + n)$$
$$y_0 = (y_1 * n + y_2 * m) / (m + n)$$



# Поворот точки против часовой стрелки

- Даны точка и угол поворота против часовой стрелки

Найти точку на которую наложится данная при повороте



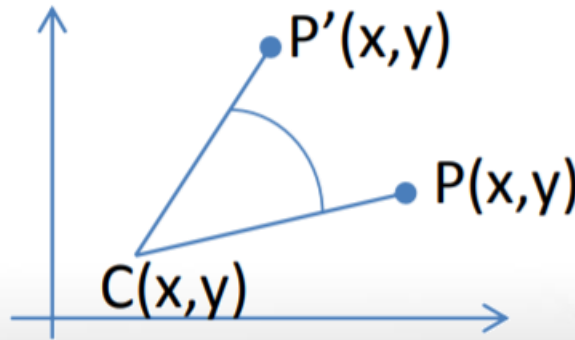
$$\begin{aligned}x &= x_1 * \cos(\alpha) - y_1 * \sin(\alpha) \\y &= x_1 * \sin(\alpha) + y_1 * \cos(\alpha)\end{aligned}$$

# Поворот точки вокруг заданной оси

- Дано точка, угол поворота против часовой стрелки, и центр поворота

Найти точку на которую наложится данная при повороте

```
Point turnof(Point p, double alpha, Point c) {  
    Point t = turn(point(p.x - c.x, p.y - c.y), alpha);  
    t.x += c.x;  
    t.y += c.y;  
    return t;  
}
```



# Уравнение прямой

- Даны две точки

Необходимо найти уравнение прямой  $a*x + b*y = c$ ,  
проходящей через них

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

$$a = y_2 - y_1; \quad b = x_1 - x_2; \quad c = a * x_1 + b * y_1;$$

# Положение точки относительно прямой

- Дана точка и прямая

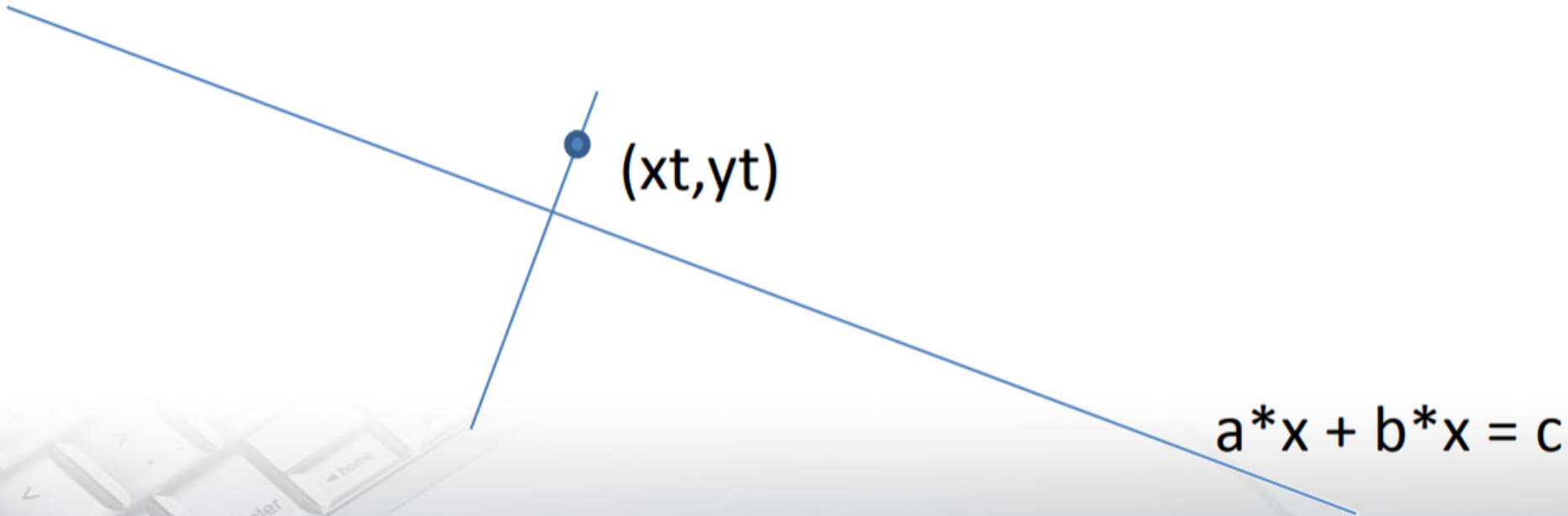
Необходимо определить знак, получаемый при подстановке точки в уравнение прямой

```
int pointInLine (Line l, Point p) {  
    double s = l.a * p.x + l.b * p.y - l.c;  
    return s < -eps ? -1 : s > eps ? 1 : 0;  
}
```

# Перпендикуляр

- Дана пряма і точка

Необхідно знайти рівняння прямої, перпендикулярної даній і проходить через задану точку



# Перпендикуляр

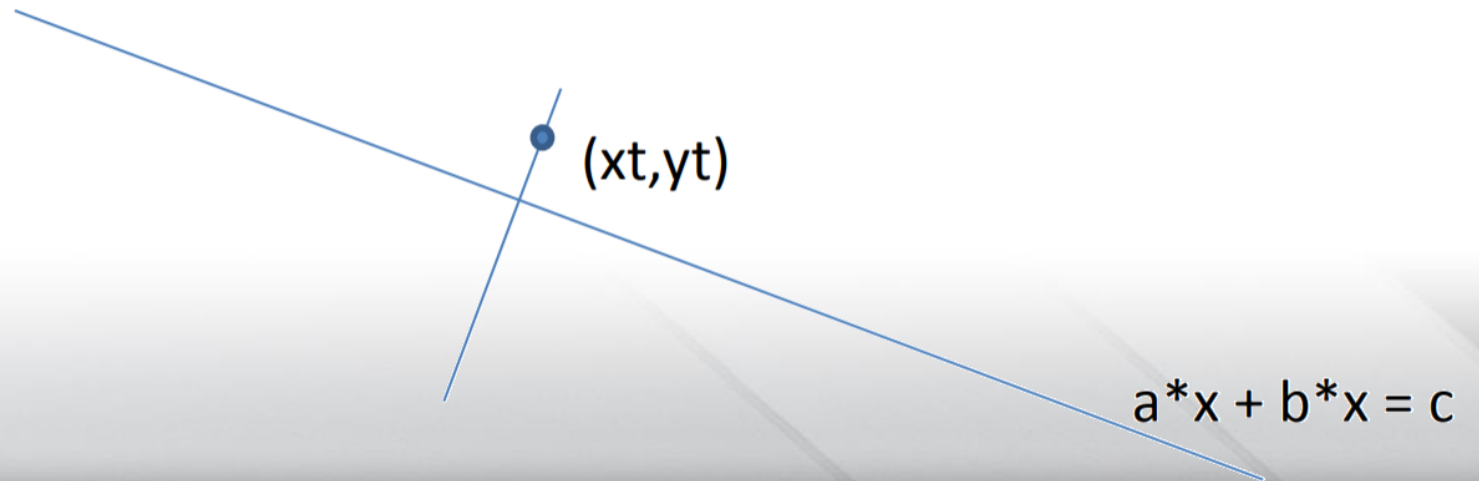
Для уравнения прямой  $a \cdot x + b \cdot y = c$  существует единственный вектор перпендикулярный этой прямой с началом в точке  $(0, 0)$ .

Это вектор нормали.

Второй конец вектора имеет координаты  $(a, b)$ .

Следовательно, у перпендикулярного ему вектора будут координаты  $(b, -a)$ , и коэффициенты уравнения будут такими.

$$b \cdot x - a \cdot y = b \cdot x_t - a \cdot y_t$$



# Расстояние от точки до прямой

- Дана точка  $(x_t, y_t)$  и прямая  $\mathbf{a} * \mathbf{x} + \mathbf{b} * \mathbf{y} = \mathbf{c}$

Необходимо найти длину перпендикуляра, опущенного из точки к прямой

$$d = \frac{|a * x_t + b * y_t - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

# Проекция точки на прямую

- Дана точка  $(x_t, y_t)$  и прямая  $a \cdot x + b \cdot y = c$

Необходимо найти точку на этой прямой, расстояние до которой от данной минимально

Найдём расстояние от точки до прямой, разделим его на длину вектора нормали.

Прибавим полученное число раз вектор нормали к точке.



# Расстояние между двумя параллельными прямыми

- Даны две параллельные прямые

$$a_1 * x + b_1 * y = c_1$$

$$a_1 * x + b_1 * y = c_2$$

Найти расстояние между ними

$$d = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}}$$

# Прямая, параллельная данной и лежащая на расстоянии $d$ от неё

- Дана прямая и число

Необходимо найти прямую, параллельную данной и лежащую на расстоянии равном данному числу

# Пересечение прямых

- Даны две прямые

Необходимо найти точку их пересечения

Решаем систему уравнений:

$$a_1 * x + b_1 * y = c_1$$

$$a_2 * x + b_2 * y = c_2$$

# Принадлежность точки отрезку

- Дана точка и отрезок

Необходимо определить принадлежит ли точка отрезку

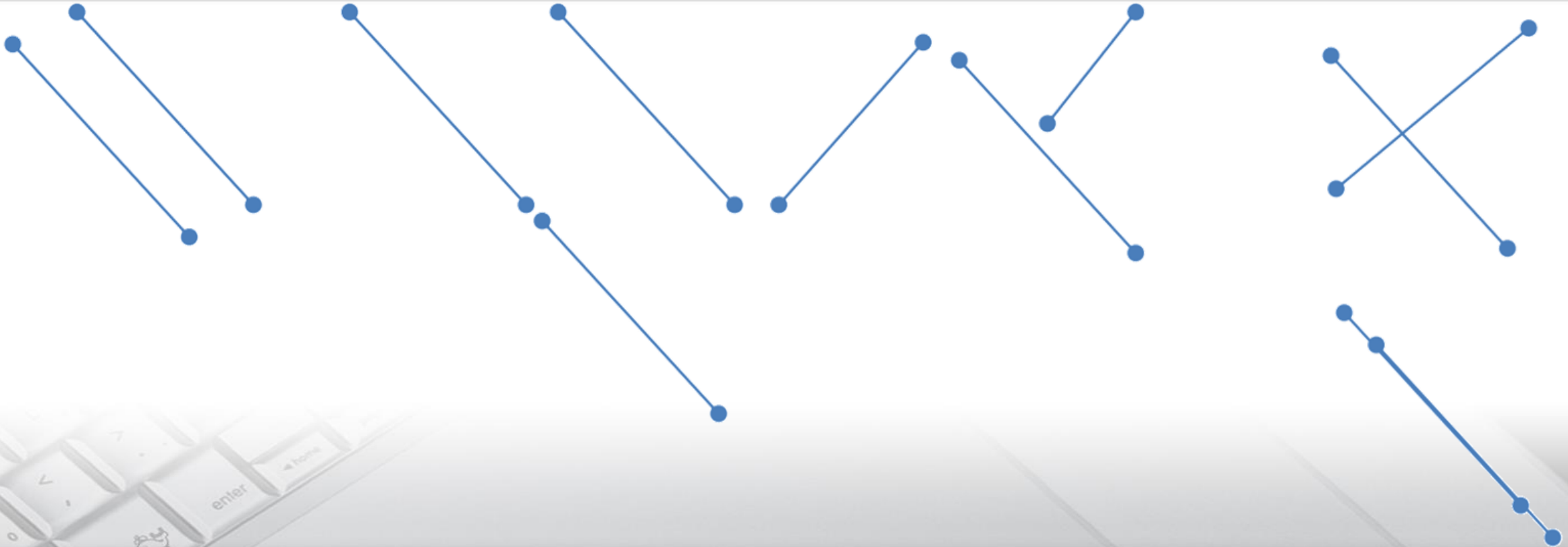
Точка принадлежит отрезку только если выполняются два условия:

- 1) Точка принадлежит прямой, проходящей через отрезок.
- 2) Точка принадлежит прямоугольной области, образуемой отрезком.

# Пересекаються ли отрезки?

- Даны два отрезка

Необходимо проверить, пересекаются ли они



# Пересекаются ли отрезки?

- Даны два отрезка

Необходимо проверить, пересекаются ли они

- Если два конца первого отрезка имеют разные знаки положения относительно прямой, проходящей через второй отрезок, и аналогичное условие выполняется для второго отрезка, то отрезки пересекаются.
- Если оба отрезка лежат на одной прямой, то отрезки будут пересекаться, если граница одного отрезка принадлежит другому.

# Расстояние от точки до отрезка

- Дан отрезок и точка

Необходимо найти расстояние от точки до отрезка

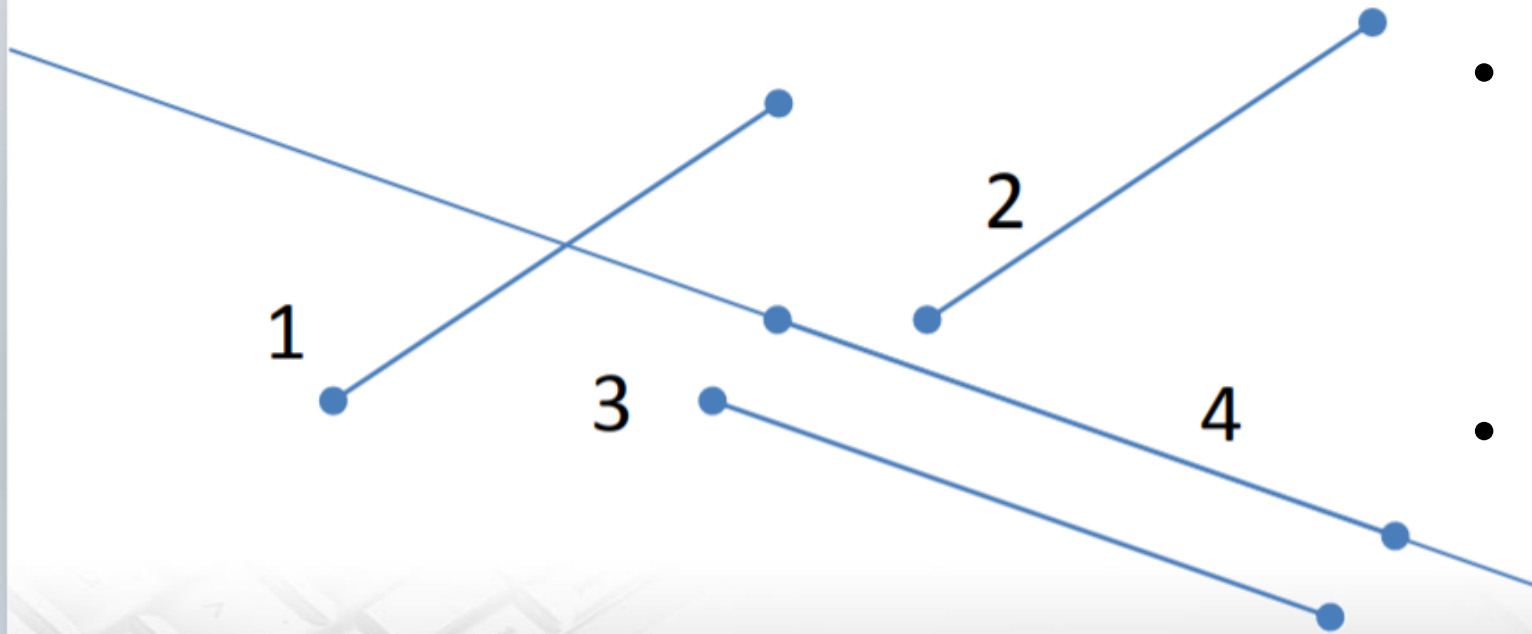
Найдём прямую, проходящую через отрезок.

- Если проекция точки на эту прямую принадлежит нашему отрезку, то расстояние будет равно расстоянию до проекции.
- Иначе расстояние равно минимальному из расстояний между точкой и границами отрезка.

# Пересечение отрезка с прямой

- Дан отрезок и прямая

Необходимо определить пересекаются ли они



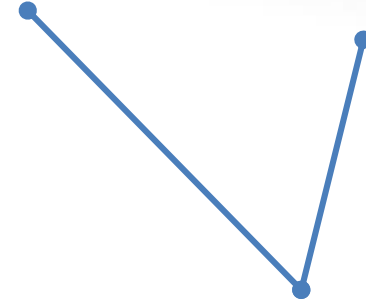
- Если концы отрезка имеют разные знаки относительно прямой, то они пересекаются.
- Если концы отрезка принадлежат прямой, то отрезок лежит на прямой.



# Угол между тремя точками

- Даны три точки.

Необходимо найти угол между ними.



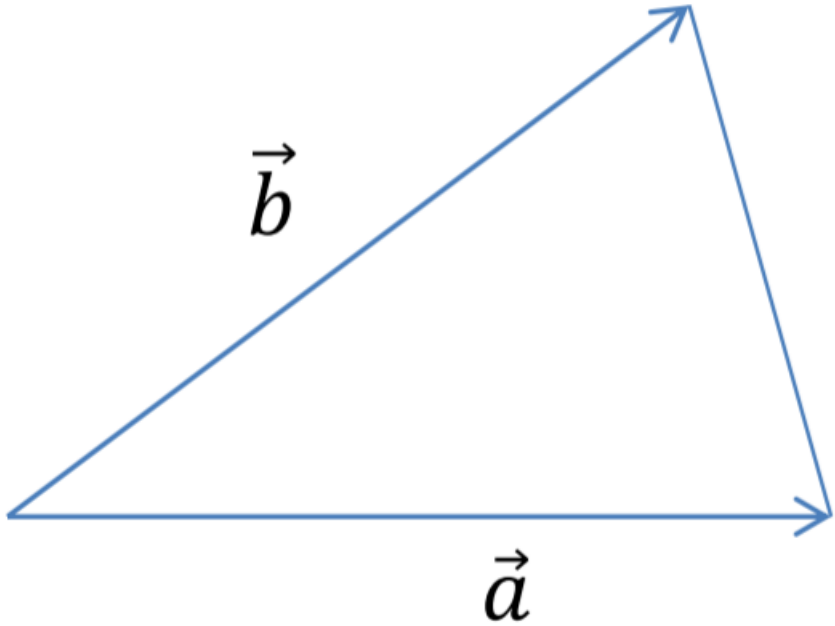
Используем скалярное произведение векторов:

$$\vec{a} * \vec{b} = |\vec{a}| * |\vec{b}| * \cos(\alpha) = x_a * x_b + y_a * y_b$$

# Положение точки относительно вектора в обходе против часовой стрелки

- Даны координаты начала и конца вектора и координаты точки.  
Необходимо определить лежит ли эта точка справа от этого вектора.

# Ориентированная площадь треугольника



$$S = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{2}$$



# Векторное произведение векторов

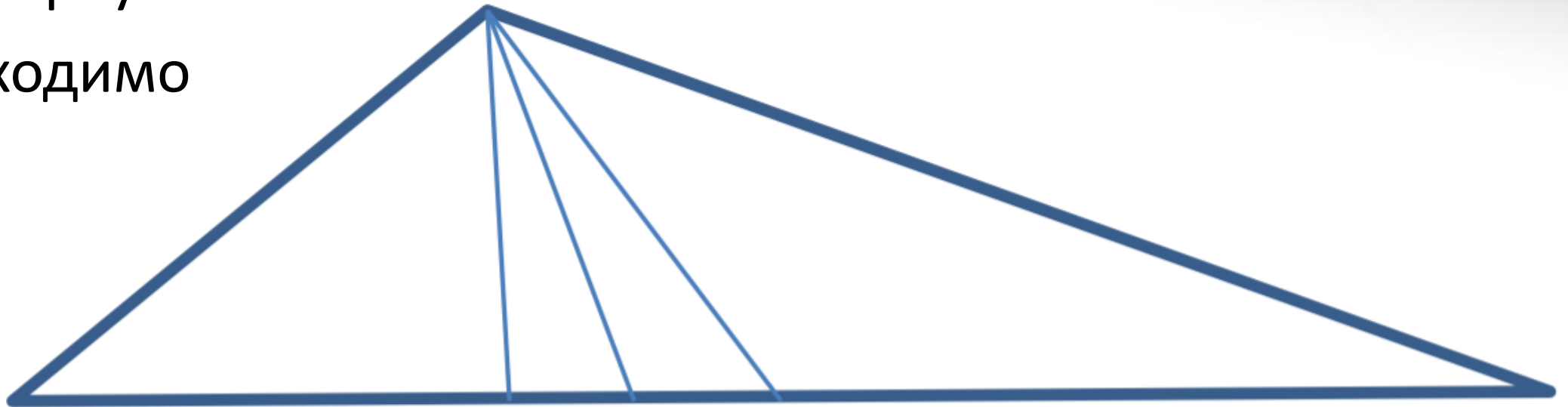
$$\vec{a} (x_a, y_a, z_a) \times \vec{b} (x_b, y_b, z_b) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Если  $z_a = z_b = 0$  ?

# Высота, медиана, биссектриса

- Дан треугольник

Необходимо



- Найти уравнение прямой проходящей через его высоту
- Найти уравнение прямой проходящей через его медиану
- Найти уравнение прямой проходящей через его биссектрису

# Вписанная в треугольник окружность

- Дан треугольник

Необходимо найти окружность, вписанную в него

- Центр окружности - это точка пересечения биссектрис углов треугольника.
- Радиус окружности равен расстоянию от центра до любой стороны треугольника.

# Описанная окружность

- Дан треугольник

Необходимо найти описанную вокруг него окружность

- Центр окружности - точка пересечения серединных перпендикуляров.
- Радиус окружности - расстояние от центра до вершины треугольника.

# Положение точки относительно окружности

- Дана точка и окружность

Необходимо выяснить, лежит ли точка внутри окружности, снаружи или на самой окружности?

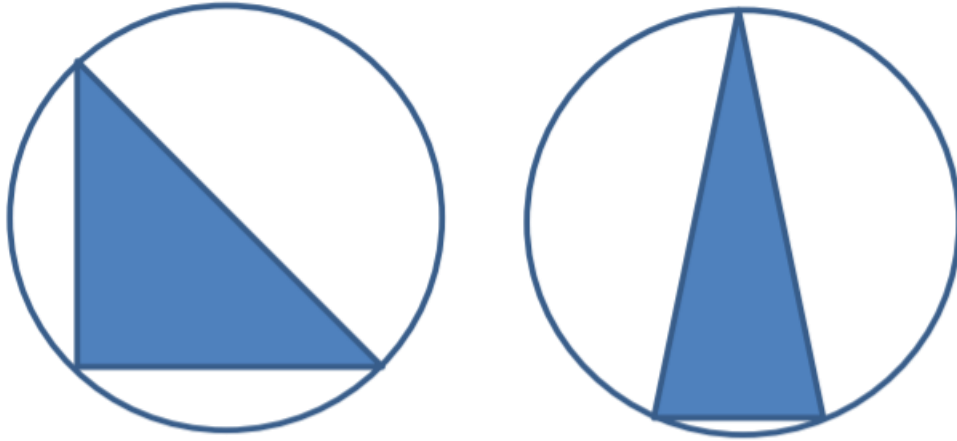
- Если расстояние от точки до центра окружности больше радиуса, то точка лежит вне нашего круга.
- Если расстояние до центра меньше радиуса, то точка лежит внутри нашего круга.
- Если расстояние до центра равно радиусу, то точка лежит на окружности.



# Минимальная окружность, покрывающая множество точек

- Дано  $n$  точек Необходимо найти окружность минимального радиуса такую, чтобы все точки лежали либо внутри, либо на границе этой окружности
- Очевидно, что на искомой окружности должны лежать точки, так как если они на ней не лежат, то радиус окружности можно уменьшить и, значит, эта окружность не была минимальной.

# Минимальная окружность, покрывающая множество точек



- Будем перебирать все тройки точек и строить минимальную окружность, покрывающую их.
- После этого будем проверять, принадлежат ли все точки найденной окружности. Из всех подходящих окружностей выберем ту, у которой минимальный радиус.

# Пересечение прямой с окружностью

- Дано прямая и окружность

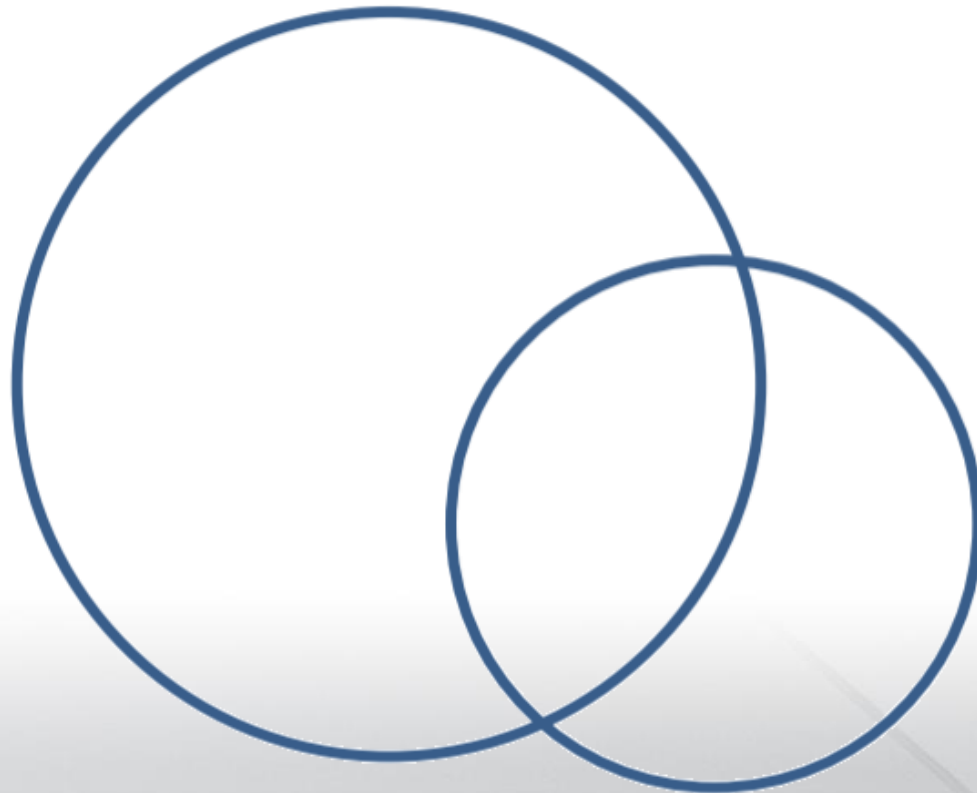
Найти точки пересечения окружности и прямой



- Идея заключается в повороте окружности и прямой, чтоб прямая совпала с осью абсцисс.
- Находим точки пересечения окружности и оси абсцисс, а потом поворачиваем их обратно.

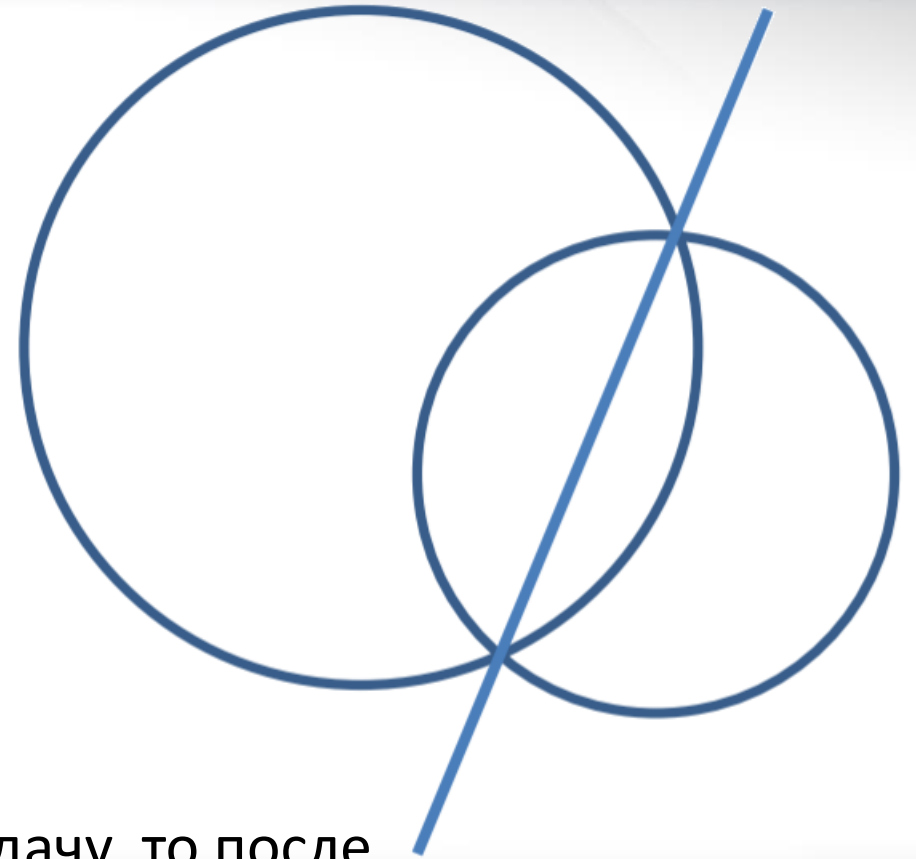
# Точки пересечения двух окружностей

- Даны две окружности  
Найти точки их пересечения



# Точки пересечения двух окружностей

- Даны две окружности  
Найти точки их пересечения



Если попробовать решить аналитически эту задачу, то после сокращений можно получить уравнение прямой, проходящей через две точки пересечения окружностей.

# Касательные к окружности

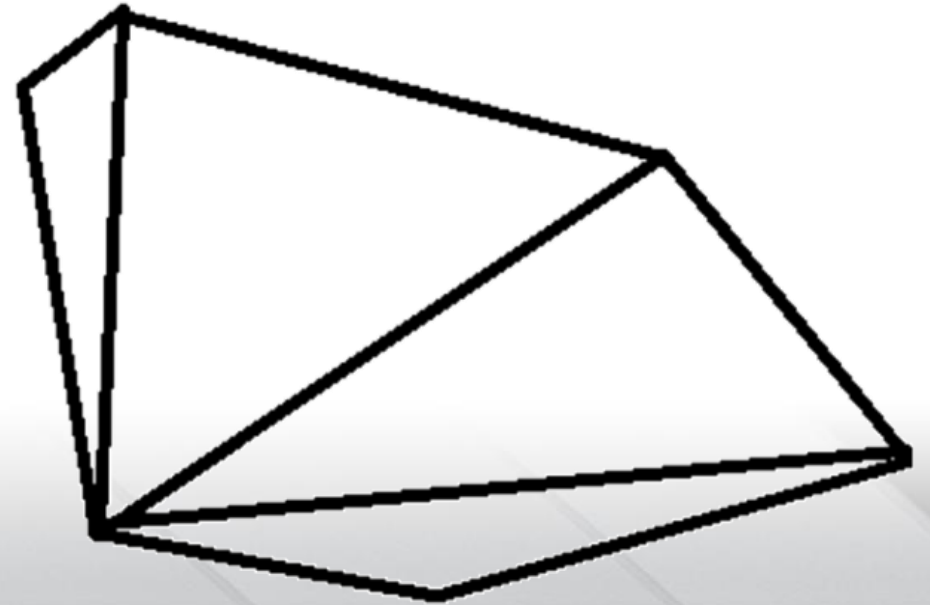
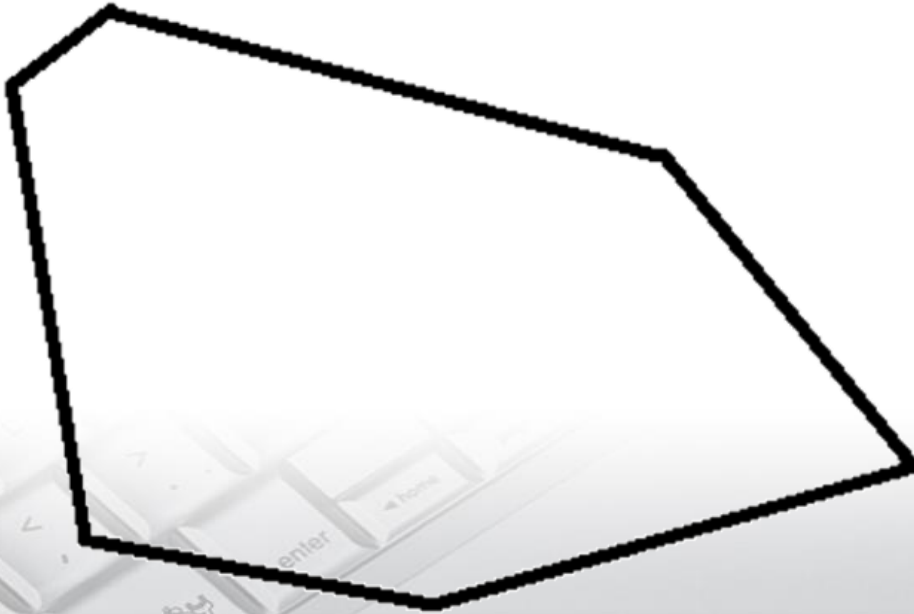
- Дана окружность и точка.

Необходимо найти точки касания касательных, проведённых к окружности из заданной точки.



# Площадь многоугольника

- Каким-либо образом разбить на непересекающиеся треугольники
- Вычислить сумму площадей треугольников

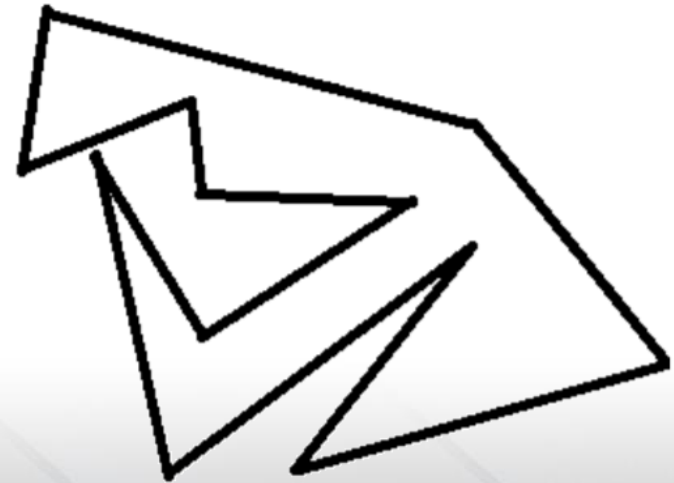




# Площадь многоугольника

- Каким-либо образом разбить на непересекающиеся треугольники
- Вычислить сумму площадей треугольников

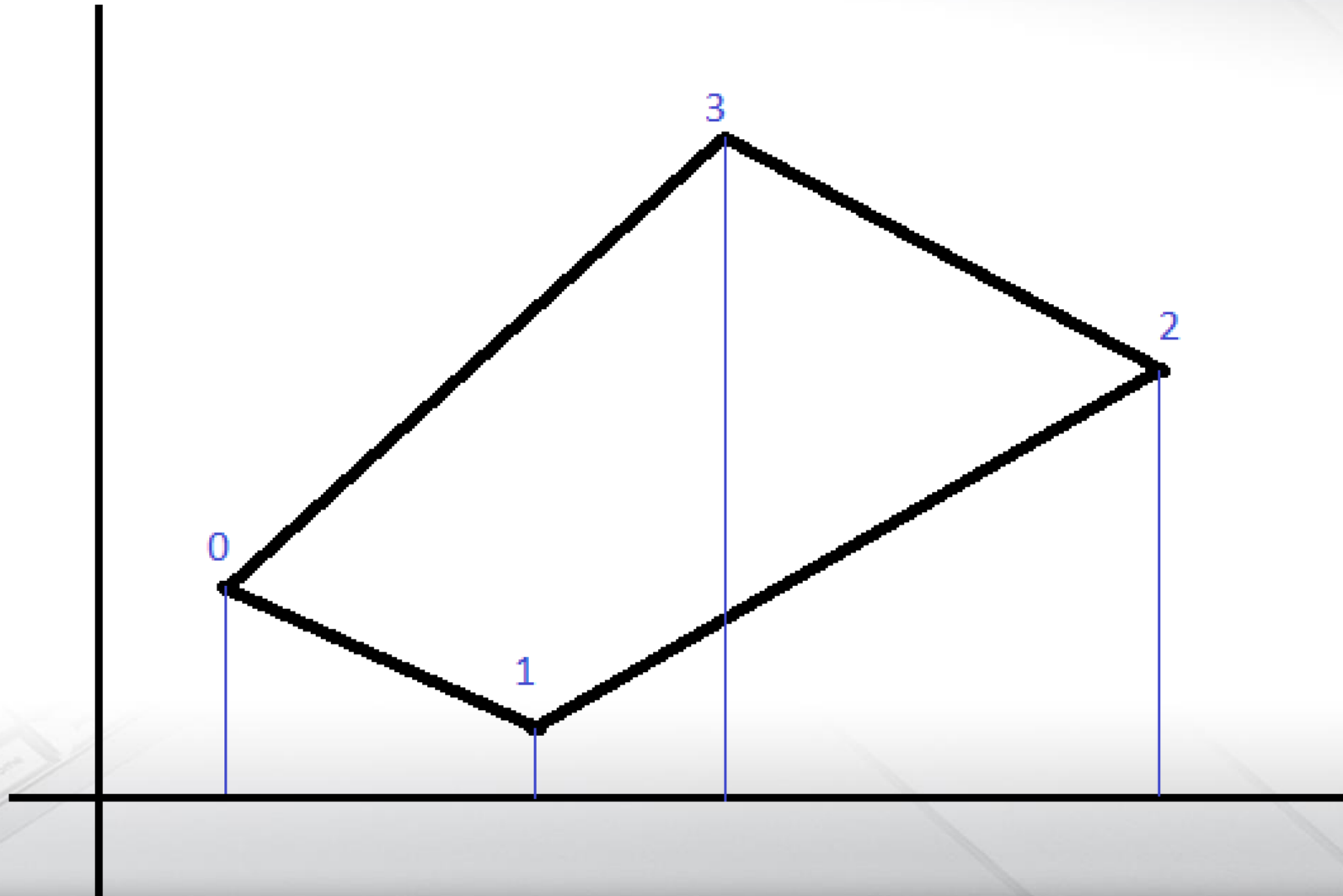
А если это сложно?







# Площадь четырехугольника



# Находится ли точка в многоугольнике?

- Дан многоугольник и точка.

Необходимо проверить, располагается ли наша точка внутри многоугольника.

- Если провести горизонтальную прямую проходящую через заданную точку, то могут возникнуть пересечения прямой с многоугольником.
- Рассмотрим все точки пересечения, у которых абсцисса меньше, чем у заданной точки.
- Если этих точек нечётное число, то исходная точка лежит внутри многоугольника, иначе нет.

# Является ли многоугольник выпуклым

- Дан многоугольник.

Необходимо проверить, является ли он выпуклым

Собственно, вопрос – что значит «выпуклый многоугольник»?

# Является ли многоугольник выпуклым

- Дан многоугольник.

Необходимо проверить, является ли он выпуклым

- Если пройти по всем вершинам выпуклого многоугольника против часовой стрелки, то можно заметить, что каждая вершина лежит слева от предыдущей стороны.
- Значит, достаточно пройти по всем трём смежным вершинам многоугольника и установить, что знак ориентированной площади треугольника этих трёх вершин всегда одинаков.
- Если это так, то перед нами выпуклый многоугольник, иначе нет.

# Выпуклая оболочка

- Дано множество точек

Найти минимальный многоугольник (по периметру),  
содержащий все эти точки

- алгоритм Джарвиса
- алгоритм Грэхема



# Алгоритм Джарвиса





# Вопросы?

